

Systemtheorie



Prof. Dr. August Reiner

Dipl. Ing. Manfred Schneider

Prof. Dr.-Ing. August Reiner



Professor für Automatisierungstechnik im Fachbereich „Elektrotechnik und Informationstechnik“ der Hochschule Darmstadt.

Schwerpunkte in Lehre und Forschung:

- Steuerungstechnik mit dem Schwerpunkt „Speicherprogrammierbare Steuerungen“.
- Regelungstechnik
- Automatisierungstechnische Systeme

Dipl. Ing. Manfred Schneider



Studiengangskoordinator und Dozent für Themen der Automatisierungstechnik

Schwerpunkte:

- Prozessautomatisierung im Anlagenbau
- Simulaton
- Sensorik

Einleitung

Die Systemtheorie, wie sie in den Ingenieurwissenschaften verwendet wird, wurde um 1920 konzipiert. Einen entscheidenden Beitrag lieferte die Arbeit von K. Küpfmüller, die unter dem Titel „Die Systemtheorie der elektrischen Nachrichtentechnik“, 1952 veröffentlicht wurde. Der Begriff „Allgemeine Systemtheorie“ geht auf den Biologen Ludwig von Bertalanffy zurück. Seine Arbeiten bilden zusammen mit der Kybernetik (Norbert Wiener, William Ross Ashby) und der Informationstheorie (Claude Shannon, Warren Weaver) die grundlegenden Überlegungen dieses Wissenschaftsansatzes.

In diesem Lehrbrief werden Grundlagen und Methoden behandelt, die benötigt werden, wenn man Systeme aus dem Bereich der Regelungstechnik und der Nachrichtentechnik analysiert und entwirft.

An Vorkenntnissen werden vorausgesetzt:

- Grundlagen der Mathematik,
- Differential- und Integralrechnung,
- Komplexe Zahlen und Funktionen,
- Lösung von gewöhnlichen linearen Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten,
- Grundlagen der Elektrotechnik (Gleichstrom, Wechselstrom).

Die Berechnungen im Lehrbrief werden z.T. mit dem Programmiersystem „Matlab“ vorgenommen. Grundkenntnisse in der Anwendung dieses Softwaresystems sind daher vorteilhaft.

Der Lehrbrief enthält neben durchgerechneten Beispielen viele Übungsaufgaben. Es wird nachdrücklich empfohlen, diese Aufgaben selbständig zu lösen. Die Ergebnisse werden zu gegebenem Zeitpunkt bekannt gegeben.

Lernziele

In diesem Lehrbrief soll der/die Studierende lernen, technische Systeme mathematisch zu beschreiben und zu analysieren. Der Lehrbrief beschränkt sich auf lineare Systeme, deren Eigenschaften sich über der Zeit nicht ändern (zeitinvariant). Die vermittelten Methoden sind die Voraussetzung für die Lösung vieler regelungstechnischer und nachrichtentechnischer Probleme.

Zu Beginn werden verschiedene Signaltypen und ihre mathematische Beschreibung vorgestellt.

Im folgenden Abschnitt wird der Student in die mathematische Beschreibung von technischen Systemen eingeführt. Damit lassen sich Aufgaben, wie die Bestimmung des Ausgangssignals bei gegebenem Eingangssignal, vornehmen. Ausgehend von dieser Basis soll der Studierende in der Lage sein auch kompliziertere Signalformen und Übertragungsverhalten mathematisch zu beschreiben, die hier nicht im Einzelnen behandelt werden.

In einem weiteren Abschnitt werden mathematische Beschreibungen der wichtigsten elementaren Systeme vorgestellt.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	I
Lernziele	III
1 Einführung in die Problematik	1
2 Signale	7
2.1 Fourier-Analyse	10
2.1.1 Fourier-Analyse periodischer Signale	10
2.1.2 Fourier-Analyse aperiodischer Signale	20
2.2 Laplace-Transformation.....	25
2.2.1 Begriff und Sinn einer Transformation	25
2.2.2 Laplace-Transformation einer Zeitfunktion	26
2.2.3 Wichtige Regeln der L-Transformation	32
3 Mathematische Beschreibung von Übertragungsgliedern (Systeme)	39
3.1 Differenzialgleichung	40
3.2 Zustandsraum.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
3.3 Testfunktionen	Fehler! Textmarke nicht definiert.
3.3.1 Zeitbereich.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
3.3.2 Frequenzbereich	Fehler! Textmarke nicht definiert.
3.4 Elektrische Netzwerke	Fehler! Textmarke nicht definiert.
3.5 Übertragungsfunktion	Fehler! Textmarke nicht definiert.
4 Besondere Eigenschaften von Übertragungsgliedern	Fehler! Textmarke nicht definiert.
4.1 Pole und Nullstellen.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
4.2 Stabilität	Fehler! Textmarke nicht definiert.
4.3 Minimumphasensystem und Allpass ...	Fehler! Textmarke nicht definiert.
Bild 4.8: Ortskurve eines Allpasses 1. Ordnung	Fehler! Textmarke nicht definiert.
5. Wichtige Übertragungsglieder	Fehler! Textmarke nicht definiert.
5.1 Übertragungsglieder mit P-Verhalten ..	Fehler! Textmarke nicht definiert.
5.1.1 Proportionalglied ohne Verzögerung (P-Glied)	Fehler! Textmarke nicht definiert.

5.1.2 Proportionalglied mit Verzögerung 1. Ordnung (PT1- Glied)	Fehler! Textmarke nicht definiert.
5.1.3 Proportionalglied mit Verzögerung 2. Ordnung (PT2-Glied)	Fehler! Textmarke nicht definiert.
5.1.4 Totzeitglied	Fehler! Textmarke nicht definiert.
5.2 Übertragungsglieder mit I-Verhalten	Fehler! Textmarke nicht definiert.
5.2.1 Integrier-Glied (I-Glied).....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
5.2.2 Integrierglied mit Verzögerung 1. Ordnung (IT1-Glied)	Fehler! Textmarke nicht definiert.
5.3 Übertragungsglieder mit D-Verhalten	Fehler! Textmarke nicht definiert.
5.3.1 Differenzier-Glied (D-Glied)	Fehler! Textmarke nicht definiert.
5.3.2 Differenzierglied mit Verzögerung 1. Ordnung (DT1-Glied)	Fehler! Textmarke nicht definiert.
6 Verknüpfung von Übertragungsgliedern	Fehler! Textmarke nicht definiert.
6.1 Reihenschaltung	41
6.2 Parallelschaltung	46
6.3 Rückkopplung	47
6.3.1 Gegenkopplung.....	48
6.3.2 Mitkopplung.....	50
Literaturverzeichnis	53
Stichwortverzeichnis.....	55

1 Einführung in die Problematik

Eine technische Anlage besteht in der Regel aus verschiedenen Teilsystemen. Die Teilsysteme sind über Signale miteinander verknüpft. Ein Beispiel zeigt die in Bild 1.1 dargestellte Anlage.

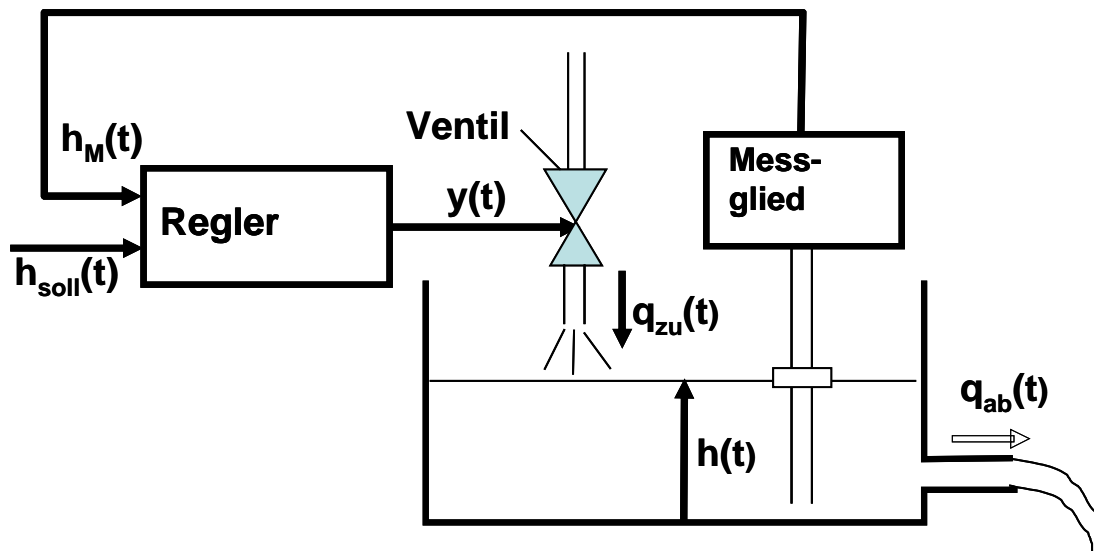


Bild 1.1: Prozessfunktionsbild Niveauregelung (t: Zeit)

Das gemessene Flüssigkeitsniveau $h_M(t)$ im Behälter soll ausreichend genau mit dem gewünschten Sollwert $h_{soll}(t)$ übereinstimmen. Der Regler hat die Aufgabe, das Ventil so einzustellen, dass der Flüssigkeitszufluss $q_{zu}(t)$ bei beliebigem positivem von Null verschiedenem Flüssigkeitsabfluss $q_{ab}(t)$ diese Aufgabe löst.

In der Technik stellt man Anlagen vereinfachend mit Blockschaltbildern dar. Bild 1.2 ist das zu Bild 1.1 zugehörige Blockschaltbild.

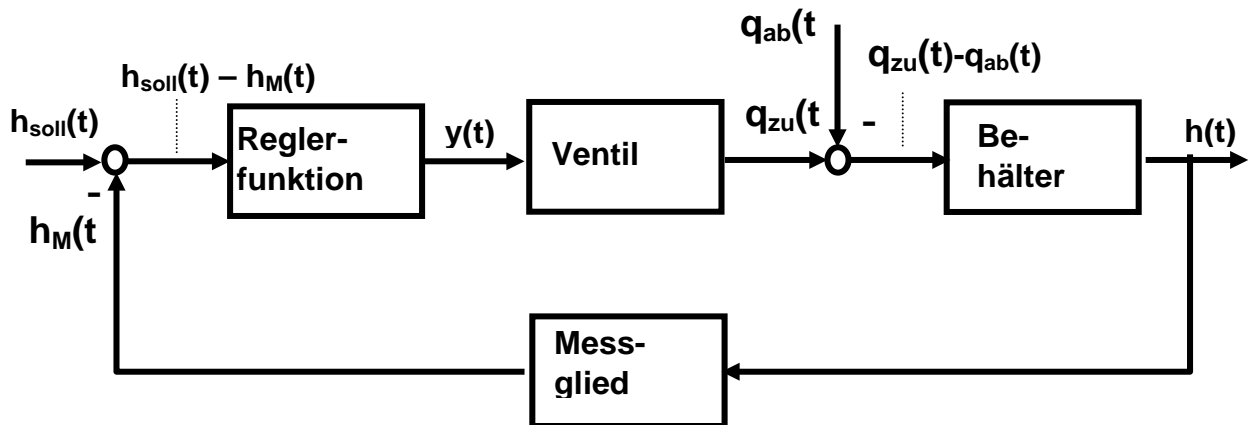
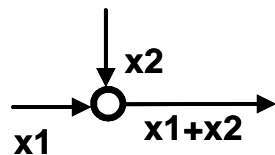


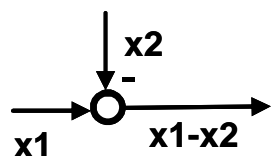
Bild 1.2: Blockschaltbild der Niveauregelung

Zur Differenz- bzw. Summenbildung werden in Blockschaltbildern die folgenden Symbole verwendet:



Summe

Der Kreis ohne Vorzeichen an den Eingängen bzw. mit einem Pluszeichen ist das Symbol für die Summenbildung.



Differenz

Der Kreis mit einem Minuszeichen am Eingang x_2 zeigt an, dass x_2 subtrahiert wird. Fehlt das Minuszeichen wird das Eingangssignal entsprechend der Angabe unter „Summe“ addiert.

Im Blockschaltbild sieht man als Teilsysteme der gesamten Anlage die Blöcke Reglerfunktion, Ventil, Behälter, und Messglied. Dazu kommen zwei Differenzglieder.

Signale sind im Blockschaltbild der Sollwert $h_{\text{soll}}(t)$, der Istwert $h_{\text{M}}(t)$, die Stellgröße $y(t)$, der Zufluss $q_{\text{zu}}(t)$ und der Abfluss $q_{\text{ab}}(t)$.

Die Blöcke werden allgemein als Systeme oder Übertragungsglieder bezeichnet.

Die Systemtheorie beschäftigt sich mit den Eigenschaften von Signalen und Systemen.

Ein Übertragungsglied hat im einfachsten Fall ein Eingangssignal und ein

Ausgangssignal. Die Eigenschaften des Systems bestimmen bei vorgegebenem Eingangssignal den Verlauf des Ausgangssignals

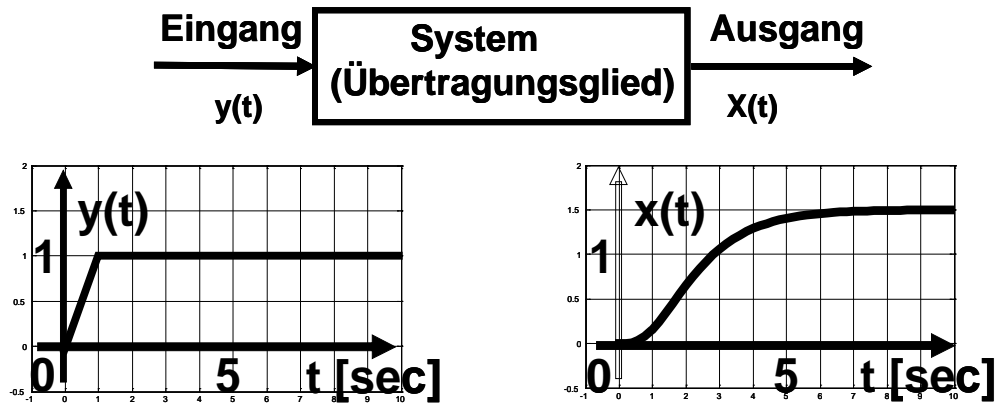


Bild 1.3: Beispiel für ein Übertragungsglied

Beispiel 1.1

Bei dem Beispiel wird das Übertragungsglied „Behälter“ von Bild 1.2 genauer betrachtet. Die Behälterfläche A sei unabhängig von h immer gleich groß.



Bild 1.4: System Behälter

mit Differenz aus Zu- und Abfluss $q_{zu}(t) - q_{ab}(t)$ als Eingangsgröße und der Füllstandshöhe $h(t)$ als Ausgangsgröße.

Behälterfläche: $A = 0,08 \text{ m}^2$, Behälterhöhe: $h_{\max} = 0,5 \text{ m}$.

In der differentiellen Zeit dt verändert sich im Behälter das Flüssigkeitsvolumen um den Wert:

$$dV = q(t) \cdot dt.$$

Das Flüssigkeitsvolumen dV verändert das Flüssigkeitsniveau im Behälter um den Wert dh :

$$dV = A \cdot dh.$$

Damit gilt:

$$dV = A \cdot dh = q(t) \cdot dt.$$

Umgeformt ergibt sich:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{A} q(t).$$

Integriert man die Beziehung, so erhält man

$$h(t) = \frac{1}{A} \int_0^t q(\tau) \cdot d\tau + h(0) .$$

$h(0)$ ist der Anfangswert, also die Flüssigkeitshöhe im Behälter zum Zeitpunkt Null. Die Integration startet zum Zeitpunkt Null und erstreckt sich bis zum Zeitpunkt t .

Eingangsgröße $q(t)$ und Ausgangsgröße $h(t)$ sind über eine Integration miteinander verknüpft. Man bezeichnet deshalb den Behälter auch als ein **Integrierglied**.

Die obige Beziehung gilt allerdings nur innerhalb bestimmter Grenzen und zwar zwischen $h = 0$ und $h = h_{\max}$. Hat z.B. bei positivem $q(t)$ die Füllstandshöhe $h(t)$ den maximalen Wert h_{\max} erreicht, dann kann h nicht weiter ansteigen. Die Zulaufmenge wird dann überlaufen.

Für die folgende Eingangsfunktion $q(t)$ soll die Ausgangsfunktion $h(t)$ berechnet werden.

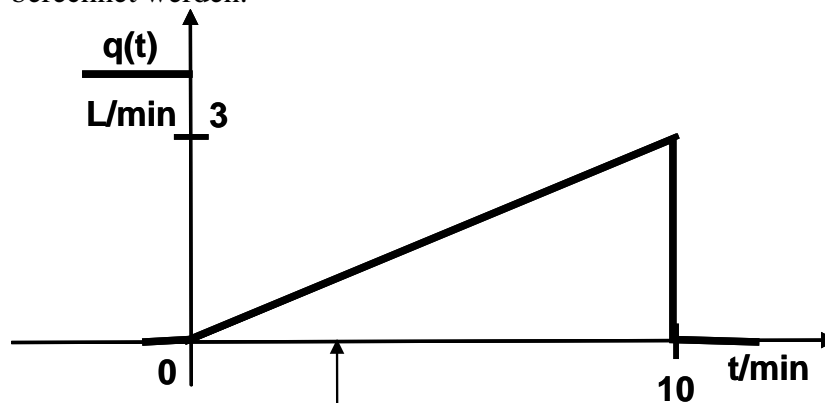


Bild 1.5: Verlauf des Differenzzuflusses $q(t)$

$A = 0,08 \text{ m}^2$, $h_{\max} = 0,5 \text{ m}$, $h(0) = 0 \text{ m}$; $1 \text{ Liter} = 10^{-3} \text{ m}^3$;
 $\text{L/min} = \text{Liter/min}$

Der Zufluss $q(t)$ nimmt in den ersten 10 min von 0 Liter/min bis 3 Liter/min zu. Ab dem Zeitpunkt 10min ist der Zufluss Null.

$$h(t) = \frac{1}{A} \int_0^t q(\tau) \cdot d\tau + h(0) = \frac{1}{0,08 \text{ m}^2} \int_0^t \frac{3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{10 \text{ min}^2} \cdot \tau \cdot d\tau = \frac{1}{0,08} \left| 3 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{min}^2} \cdot \frac{\tau^2}{2} \right|_0^t$$

$$h(t) = 1.875 \frac{\text{mm}}{\text{min}^2} \cdot t^2 \quad \text{für } 0 \text{ min} \leq t \leq 10 \text{ min}$$

Für $t > 10 \text{ min}$ bleibt $h(t)$ konstant auf dem Wert für $t = 10 \text{ min}$.
 $h(10 \text{ min}) = 187,5 \text{ mm}$

Übungsaufgabe 1.1: Der Behälter vom Beispiel 1.1 soll mit Flüssigkeit gefüllt werden. Die Flüssigkeitshöhe $h(t)$ soll der folgenden Funktion genügen:



$$h(t) = 0,4 \text{ m} \cdot (1 - e^{-t/5 \text{ min}}), \text{ für } t \geq 0.$$

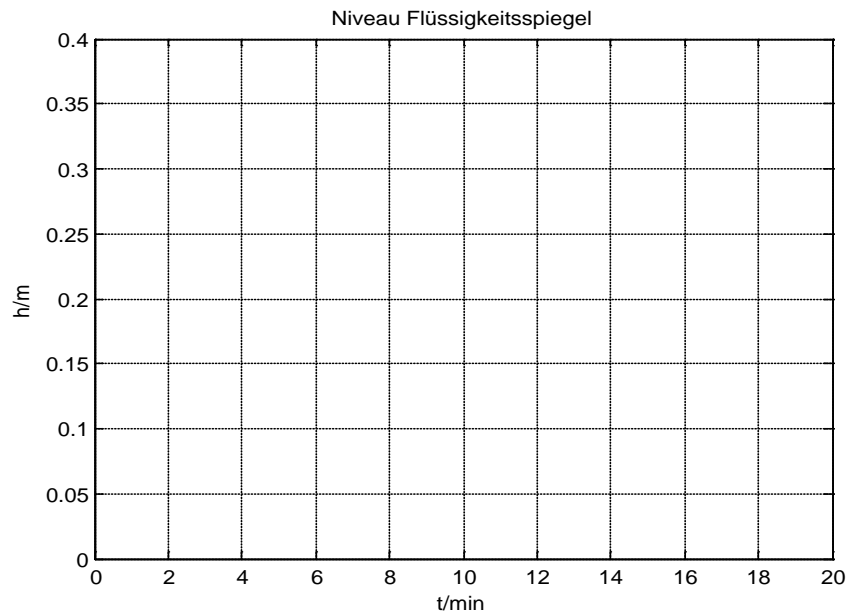


Bild 1.6: vorgegebene Funktion der Füllhöhe über der Zeit

Zu Beginn ist nach der obigen Funktion der Behälter leer ($h(0) = 0$).

- a.) Nach welcher Zeit hat $h(t)$ 50% des Endwertes erreicht?
- b.) Berechnen Sie den Zufluss $q(t)$ für den gewünschten Verlauf von $h(t)$!
- c.) Zeichnen Sie die Funktion $q(t)$!
Verwenden Sie dazu, wenn vorhanden, das Programm „Matlab“ [1].

2 Signale

Zuerst werden die verschiedenen Signaltypen vorgestellt.

Beim Beispiel (Bild 1.1 und Bild 1.2) liegen **Analoge Signale** vor. Die analogen Signale haben zu jedem Zeitpunkt t einen zugeordneten Wert. Analoge Signale können **periodisch** oder **aperiodisch** (nichtperiodisch) sein.

Ein oft auftretendes periodisches Signal ist z.B. die trigonometrische Funktion

$$y(t) = A * \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Ein in der Systemtheorie häufig genutztes aperiodisches Signal ist die Sprungfunktion.

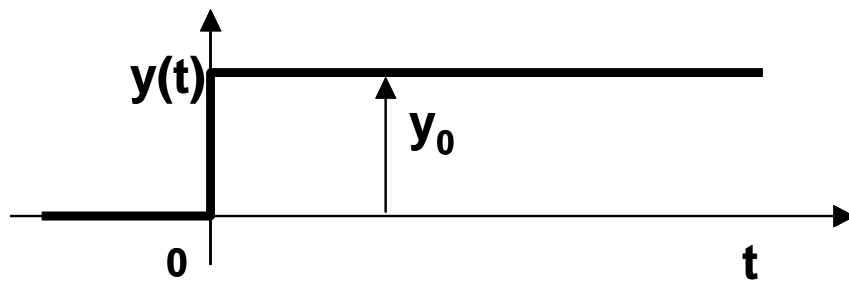


Bild 2.1: Sprungfunktion

Die Sprungfunktion wird oft als Eingangsfunktion bei Übertragungsgliedern aufgeschaltet um Systeme zu testen. Die Ausgangsfunktion auch Sprungantwort genannt, zeigt dann die Eigenschaften des Übertragungsgliedes.

Neben den analogen Signalen gibt es die **Diskreten Signale**, die auch als Abtastsignale bezeichnet werden. (Unterscheidung diskrete Amplituden, diskrete Zeiten)

Betrachtet man den Regler von Bild 1.2 genauer, dann könnte es sein, dass die Reglerfunktion mit einem Digitalrechner realisiert wird. Bild 2.2 zeigt die Struktur des Reglers, der auch als Abtastregler bezeichnet wird.

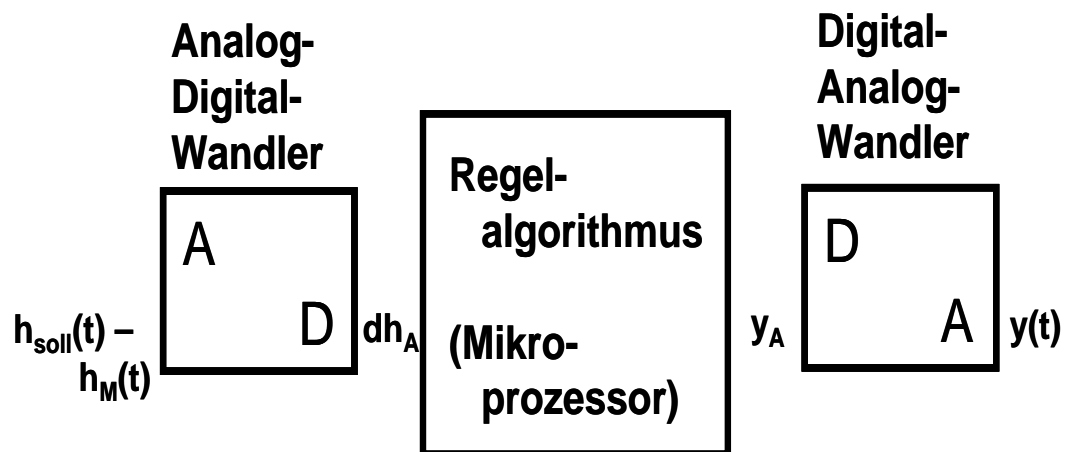


Bild 2.2: Digitaler Regler

Das analoge Signal $h_{\text{soll}}(t) - h_{\text{M}}(t)$ wird mit dem AD-Wandler abgetastet und in eine Abtastfolge dh_{A} also in ein diskretes Signal gewandelt. Zu den Abtastzeitpunkten wird vom AD-Wandler ein Zahlenwert ausgegeben. Zwischen zwei benachbarten Abtastwerten liegt die Abtastzeit T . Bild 2.3 zeigt die diskreten Funktionen dh_{A} und y_{A} .

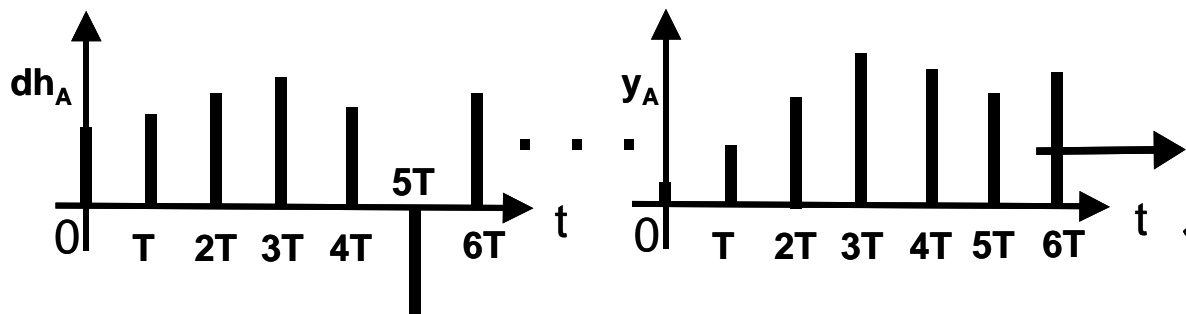


Bild 2.3: Diskrete Ein- und Ausgangsfunktion

Der Mikroprozessor ist mit dem Regelalgorithmus programmiert. Er berechnet für jeden neuen Eingangswert dh_{A} einen Ausgangswert y_{A} . Der DA-Wandler setzt anschließend die Abtastwerte y_{A} in ein analoges Signal um, das in der Regel eine Treppenform besitzt.

In diesem Lehrbrief wird nicht weiter auf die diskreten Signale eingegangen. Abtastregelungen werden in vielen Lehrbüchern der Regelungstechnik behandelt, z.B. in [2].

Ein weiterer Typ von Signalen stellen die **Stochastischen Signale** dar. Bild 2.4 stellt ein solches Signal vor.

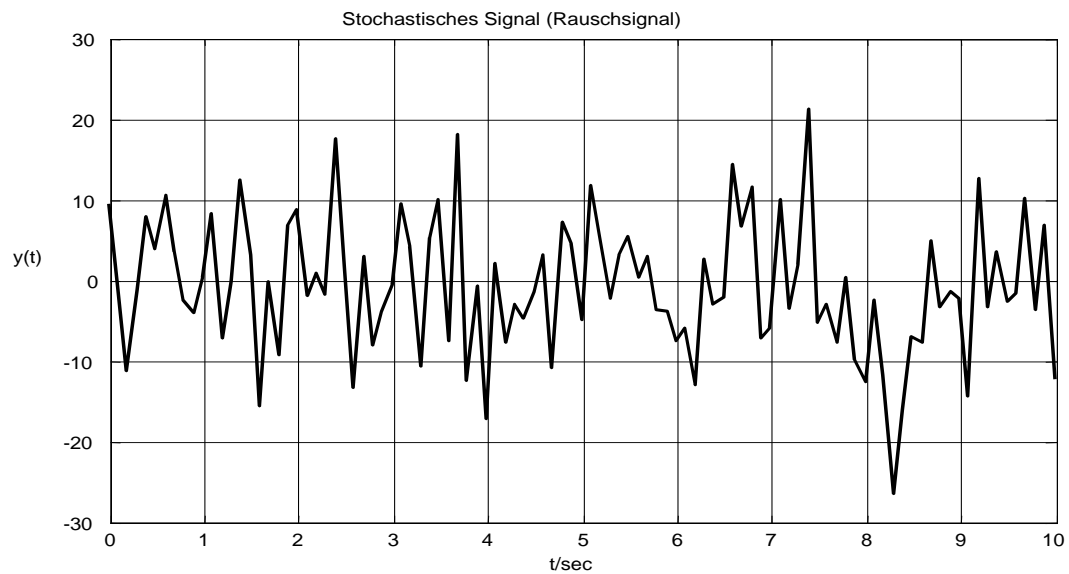


Bild 2.4: Stochastisches Signal

Kennt man den Signalwert y zum Zeitpunkt t_0 , dann kann man nicht vorhersagen welchen exakten Wert das Signal y zum Zeitpunkt t_0+dt hat. Man kann nur die Wahrscheinlichkeit angeben, dass der Signalwert in einem bestimmten Umgebungsbereich des Signalwertes $y(t_0)$ liegt.

Solche Signale treten oft als überlagerte Störungen (Rauschen) auf.. Sie können jedoch auch für bestimmte regelungstechnische Aufgaben genutzt werden. Für eine Vertiefung dieses Themas sei auf [3] und [4] verwiesen.

Übungsaufgabe 2.1:

Ein Signal $q(t)$ am Eingang des Behälters (Bild 1.4) wird durch folgende Funktion beschrieben

$$q(t) = 5L/\text{min} * \text{sign}[\sin(0,3*t/\text{min})].$$

Für den Behälter gelten die Angaben von Beispiel 1.1. Für die Funktion $\text{sign}(x)$ gilt:

$$\text{sign}(x) = 1, \text{ für } x \geq 0 \text{ und } \text{sign}(x) = -1, \text{ für } x < 0.$$

- a.) Skizzieren Sie die Funktion $q(t)$!
- b.) Bestimmen Sie den Verlauf von $h(t)$ im Behälter, wenn $q(t)$ dem Behälter zufließt und zu Beginn $h(0) = 0$ ist !

2.1 Fourier-Analyse

2.1.1 Fourier-Analyse periodischer Signale

Für manche Aufgaben ist es sinnvoll Signale in den Frequenzbereich zu transformieren.

Die periodische Zeitfunktion $x(t) = A * \cos(\omega_0 * t + \varphi)$

ist gekennzeichnet durch die Amplitude A , die Kreisfrequenz ω_0 und die Phasenverschiebung φ . Das Frequenzspektrum dieser Funktion hat folgende Gestalt:

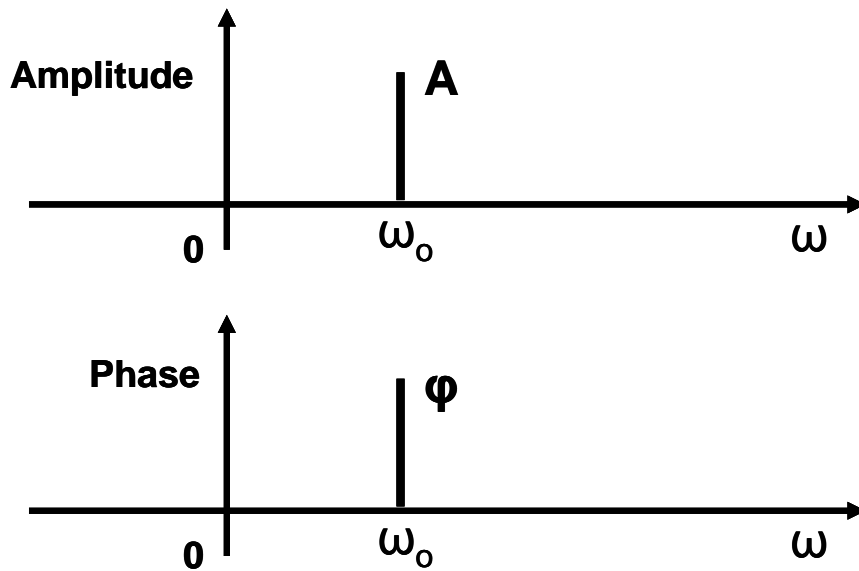


Bild 2.5: Amplituden- und Phasenspektrum

Vielfach wird nur das Amplitudenspektrum angegeben, das in der Regel als Frequenzspektrum bezeichnet wird.

Beispiel 2.1

Das Frequenzspektrum der folgenden periodischen Funktion (Spannung) ist zu zeichnen

$$u(t) = 4V \cdot \sin((3/\text{sec}) \cdot t) - 2,5V \cdot \cos((5/\text{sec}) \cdot t).$$

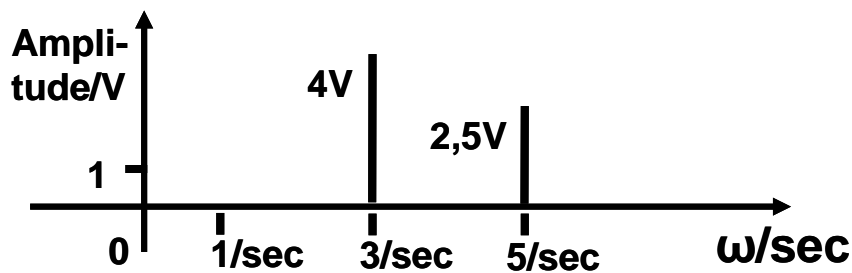


Bild 2.6: Amplitudenspektrum für Beispiel 2.1

Das Spektrum enthält zwei Spektrallinien für die beiden Frequenzen $\omega_1 = 3/\text{sec}$ und $\omega_2 = 5/\text{sec}$. Die erste Spektrallinie hat die Höhe 4V, die zweite Spektrallinie die Höhe von 2,5V. Das Spektrum zeigt unmittelbar, dass das Signal zwei sinusförmige Signalanteile enthält

Jedes periodische Signal lässt sich mit der Fourieranalyse in eine Summe von sinusförmigen Signalen zerlegen.

Beispiel 2.2:

Das rechteckförmige periodische Signals (Bild 2.7) lässt sich in eine Reihe von sinusförmigen Funktionen zerlegen. Es handelt sich um ein periodisches rechteckförmiges Signal für das gilt $f(+t) = f(-t)$. Es ist also eine gerade Funktion.

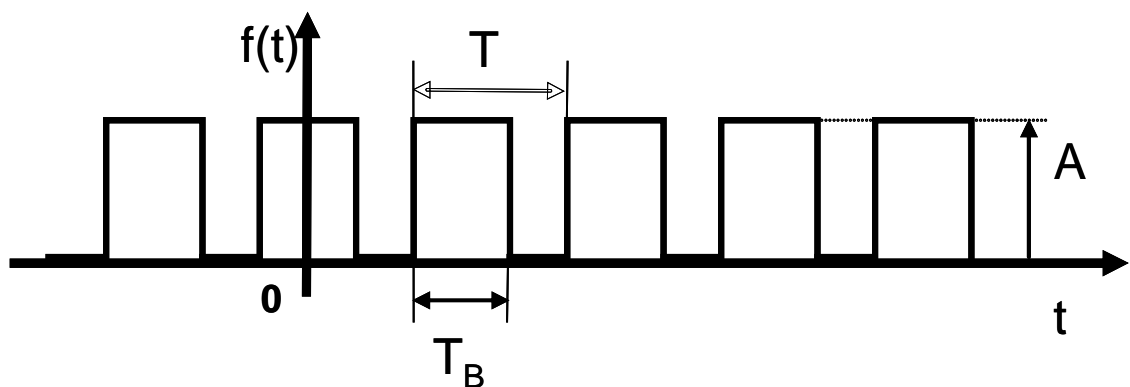


Bild 2.7: Periodisches Rechtecksignal: Die Periodendauer ist T. Die Pulse der Höhe A haben eine Breite von T_B .

Mit der Fourieranalyse kann man die periodische Rechteckfunktion als Reihe mit unendlich vielen Gliedern darstellen, wobei $\omega_0 = 2\pi/T$ die Grundkreisfrequenz der periodischen Funktion darstellt

$$f(t) = \frac{A \cdot T_B}{T} + \frac{2 \cdot A}{\pi} \left[\sin\left(\pi \frac{T_B}{T}\right) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) + \frac{1}{2} \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{T_B}{T}\right) \cdot \cos(2\omega_0 \cdot t) + \dots \right]$$

Zusammengefasst erhält man:

$$f(t) = A \cdot \frac{T_B}{T} + \frac{2 \cdot A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin\left(n \cdot \pi \cdot \frac{T_B}{T}\right) \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t).$$

Gl.(2.1) \longleftrightarrow

Neben der Grundkreisfrequenz ω_0 treten in Gl.(2.1) Vielfache der Grundfrequenz wie $2 \cdot \omega_0$, $3 \cdot \omega_0$, $4 \cdot \omega_0$ usw. auf. Man bezeichnet diese Anteile auch als Oberwellen.

Für den Sonderfall, $T_B = T/2$ vereinfacht sich die Beziehung Gl.(2.1), da dann die geradzahigen Oberwellen mit den Kreisfrequenzen $2 \cdot \omega_0$, $4 \cdot \omega_0$, $6 \cdot \omega_0$ usw. entfallen. Hiefür erhält man:

$$f(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \left[\cos(\omega_0 \cdot t) - \frac{1}{3} \cos(3\omega_0 \cdot t) + \frac{1}{5} \cos(5\omega_0 \cdot t) - \frac{1}{7} \cos(7\omega_0 \cdot t) + \dots \right]$$

Gl.(2.2)

Das Amplitudenspektrum von Gl.(2.2) hat die Gestalt:

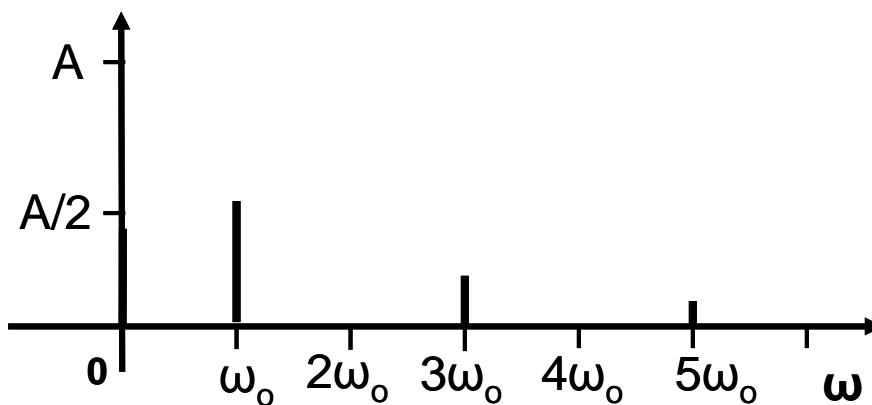


Bild 2.8: Amplitudenspektrum entsprechend Gl.(2.2)

Die Amplituden der Oberwellen nehmen mit wachsender Frequenz stark ab.

Im Anschluss soll gezeigt werden, welche Gestalt die periodische Funktion annimmt, wenn man nur den Mittelwert $A/2$, die Grundwelle ω_0 und die drei Oberwellen bei $3\omega_0$, $5\omega_0$ und $7\omega_0$ berücksichtigt. Die höheren Oberwellen werden vernachlässigt.

Parameter: $A = 1$, $T = 2 \text{ sec}$, $\omega_0 = 2\pi/T = \pi/\text{sec} = 3.14/\text{sec}$, $T_B = T/2 = 1 \text{ sec}$.

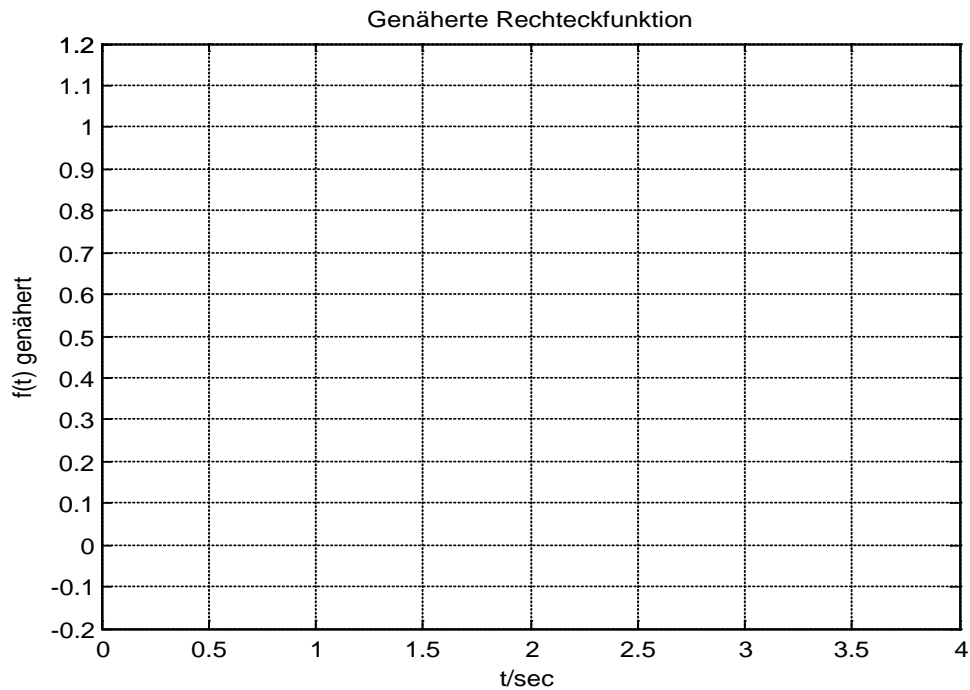


Bild 2.9: Näherung der Rechteckfunktion Gl.(2.2) bis zur 7. Oberwelle

Bild 2.9 zeigt, dass die Vernachlässigung der höheren Oberwellen dazu führt, dass die Steilheit der Flanken und die Ecken der Rechteckfunktion nicht gut wiedergegeben werden. Generell gilt: Steile Flanken, Spitzen und Ecken in periodischen Funktionen werden nur dann gut wiedergegeben, wenn die hohen Frequenzanteile berücksichtigt werden.

Als nächstes wird gezeigt, wie man eine periodische Funktion in eine Fourier-Reihe entwickelt.

$f(t)$ sei eine periodische Funktion mit der Periodendauer T . Die Reihenentwicklung hat die allgemeine Form:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t) + b_n \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t + \varphi_n) \quad \text{Gl.(2.3)}$$

ω_0 ist die Kreisfrequenz der Grundwelle bzw. des periodischen Signals. Es gilt: $\omega_0 = 2\pi/T$.

a_0 , a_n und b_n sind die zu berechnenden Koeffizienten. Aus a_n und b_n folgt d_n und φ_n .

Die Koeffizienten werden mit folgenden Formeln berechnet ($n=1, 2, 3, \dots$):

$$\left| \begin{array}{l} a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \cdot dt, \\ a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t) \cdot dt, \\ b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t) \cdot dt. \end{array} \right| \text{Gln. (2.4)}$$

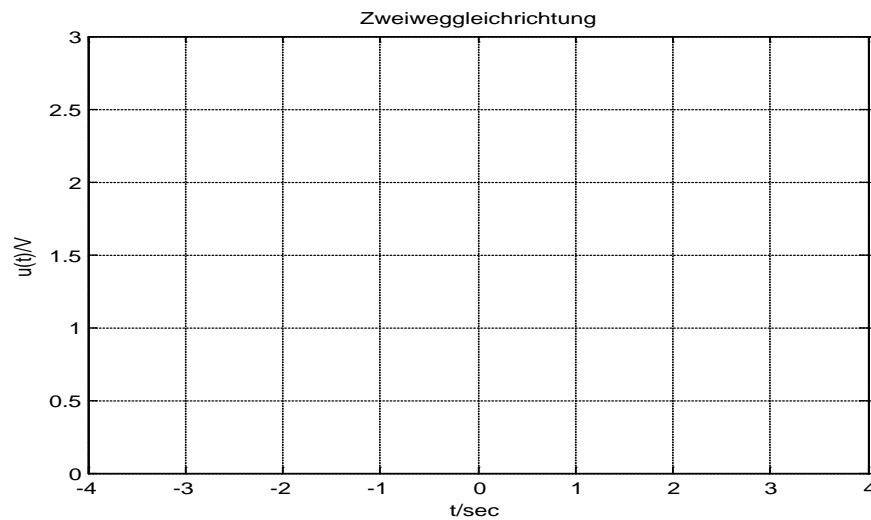
$a_0/2$ ist der Mittelwert der periodischen Funktion. Die Integration erfolgt bei allen drei Integralen über eine Periode der periodischen Funktion, also der Zeit T .

Aus a_n und b_n kann man d_n und φ_n mit den folgenden Beziehungen berechnen:

$$\left| \begin{array}{l} d_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \varphi_n = \arctan \frac{a_n}{b_n} \end{array} \right| \text{Gln. (2.5)}$$

Handelt es sich bei der Funktion $f(t)$ um eine gerade Funktion, dann ist $f(t) = f(-t)$. In diesem Fall ist b_n stets Null ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Ist $f(t)$ eine ungerade Funktion, dann gilt $f(t) = -f(-t)$. Dies hat zur Folge, dass alle a_n -Werte Null sind.

Beispiel 2.3:**Bild 2.10: Gleichgerichtete Spannung $u(t) = 3V \cdot |\sin((3,14/\text{sec}) \cdot t)|$**

Für die gleichgerichtete Spannung soll die Fourier Reihe entwickelt werden. Es handelt sich um eine gerade Funktion $u(-t) = u(t)$, daher sind die Koeffizienten b_n alle Null. Die Periodendauer von $u(t)$ beträgt $T = 1\text{sec}$, sie ist halb so groß wie die Periodendauer der Sinusspannung vor der Gleichrichtung. Damit folgt: $\omega_0 = \pi/T$.

Es gilt nach Gl.(2.4):

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T 3V \cdot \sin\left(\frac{\pi}{T}t\right) \cdot dt = \frac{4 \cdot 3V}{\pi} \quad ,$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T 3V \cdot \sin\left(\frac{\pi}{T}t\right) \cdot \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt.$$

Mit der trigonometrischen Beziehung $\sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) = 0,5 \cdot [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$ lässt sich das obige Integral lösen, siehe [5]. Man erhält das Ergebnis

$$a_n = 0, \quad \text{für } n = 1, 3, 5, \dots$$

$$a_n = -\frac{12 \text{ V}}{\pi} \cdot \frac{1}{(n-1) \cdot (n+1)}, \text{ für } n = 2, 4, 6, \dots$$

Mit den berechneten a_n -Werten ergibt sich die Fourier-Reihe zu

$$u(t) = 1,91 \text{ V} - 3,82 \text{ V} \left[\frac{1}{1 \cdot 3} \cos(2 \cdot \omega_0 \cdot t) + \frac{1}{3 \cdot 5} \cos(4 \cdot \omega_0 \cdot t) + \frac{1}{5 \cdot 7} \cos(6 \cdot \omega_0 \cdot t) + \dots \right]$$

Übungsaufgabe 2.2:

- a.) Für die folgende periodische Funktion ist die Fourier-Reihe zu entwickeln.

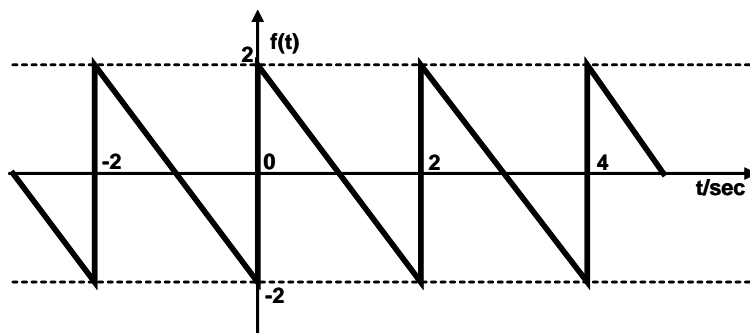
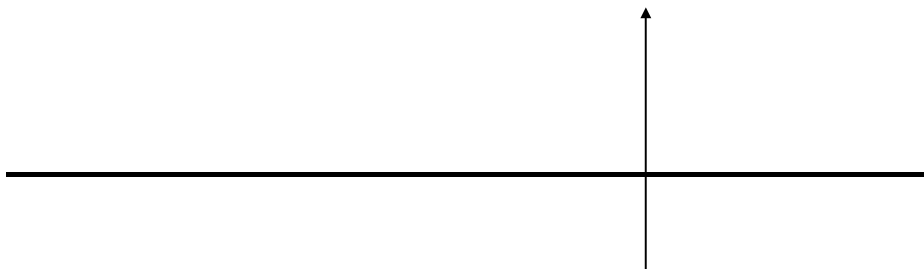


Bild 2.11: periodische Funktion

- b) Zeichnen Sie das Amplitudenspektrum !



In Formelsammlungen, Taschenbüchern und Lehrbüchern findet man Tabellen, in denen für viele verschiedene periodische Funktionen die Fourier-Reihen angegeben sind, z.B. in [5, 6, 7].

Sinusförmige Funktionen spielen in der Technik und damit auch in der Systemtheorie eine große Rolle. Als Beispiel sei auf elektrische Wechselstromschaltungen verwiesen, bei denen die Spannungen und

Ströme oft sinusförmig sind. Sind bei einem linearen zeitinvarianten System die Eingangssignale sinusförmig, dann sind auch die Ausgangssignale sinusförmig und haben die gleiche Frequenz wie die Eingangssignale.

Für die Berechnungen bei solchen Systemen hat es sich als vorteilhaft erwiesen, die komplexe Rechnung einzusetzen.

Im Anschluss wird gezeigt, dass auch bei der Fourier-Transformation mit komplexen Funktionen gerechnet werden kann. Die Kenntnis der komplexen Zahlen und das Rechnen mit komplexen Zahlen wird vorausgesetzt. In den Lehrbüchern [6] und [7] und in dem Taschenbuch [5] wird das Rechnen mit komplexen Zahlen behandelt.

Zwischen dem komplexen Zeiger $e^{j\alpha}$ und den trigonometrischen Funktionen gilt folgender Zusammenhang:

$$e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \cdot \sin(\alpha) \quad e^{-j\alpha} = \cos(\alpha) - j \cdot \sin(\alpha) \quad .$$

Gl.(2.6)

Damit erhält man

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{2}(e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}) \quad \text{und} \quad \sin(\alpha) = \frac{1}{2j}(e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}).$$

Gln.(2.7).

Somit gilt für die nachstehende sinusförmige Schwingung

$$f(t) = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) = \frac{A}{2} \cdot (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}).$$

Gl.(2.8)

$f(t)$ besitzt zwei Spektralanteile bei den Frequenzen ω_0 und $-\omega_0$.

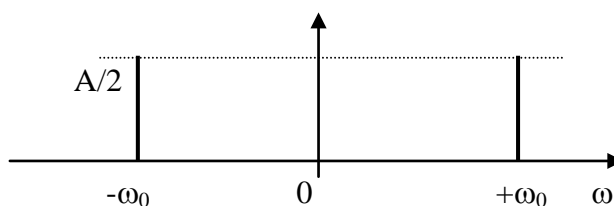


Bild 2.12: Spektrallinien für die Funktion $f(t) = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$

Bisher hatte die Funktion $f(t) = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$ nur eine Spektrallinie bei ω_0 mit der Höhe A .

Beim komplexen Fourierspektrum kommt dazu eine zweite Spektrallinie bei $-\omega_0$. Die beiden Spektrallinien sind allerdings nur halb so hoch nämlich $A/2$. Die Spektrallinienverteilung beim komplexen Spektrum ist

symmetrisch zur Kreisfrequenz $\omega_0 = 0$.

Beispiel 2.4:

Beim Beispiel 2.1 wurde das Amplitudenspektrum der Funktion

$$u(t) = 4V \cdot \sin((3/\text{sec}) \cdot t) - 2,5V \cdot \cos((5/\text{sec}) \cdot t)$$

dargestellt. Es enthält die Spektrallinien bei den Kreisfrequenzen $\omega_1 = 3/\text{sec}$ und $\omega_2 = 5/\text{sec}$.

Für die Funktion $u(t)$ ist das komplexe Fourierspektrum zu zeichnen !

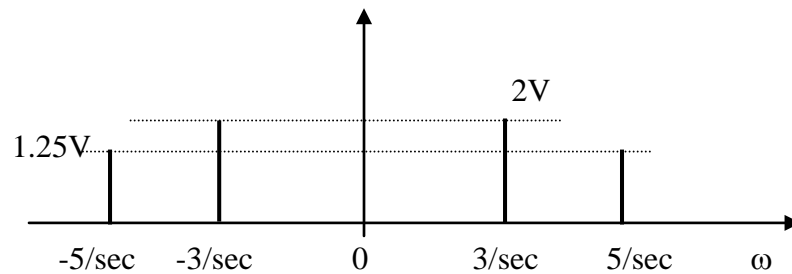


Bild 2.13: Spektrallinien der obigen Funktion

Zusätzlich treten Spektrallinien bei $-3/\text{sec}$ und $-5/\text{sec}$ auf. Die Höhe der Spektrallinien hat sich halbiert.

Die Reihenentwicklung einer periodischen Funktion $f(t)$ hat bei der komplexen Darstellung die Gestalt

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{j \cdot \omega \cdot n \cdot t} \quad \text{Gl.(2.9)}$$

Die Koeffizienten c_n berechnen sich mit der Beziehung

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot n \cdot t} \cdot dt \quad \text{Gl.(2.10)}$$

T ist die Periodendauer der periodischen Funktion $f(t)$.

Zwischen den Koeffizienten a_n , b_n der Fourier –Reihe nach Gl.(2.3) bzw. den Gln.(2.4) und dem Koeffizienten der komplexen Fourier-Reihe c_n besteht folgender Zusammenhang:

$$\begin{aligned}
 c_n &= 0,5 \cdot (a_n - j \cdot b_n), \text{ für } n > 0, \\
 c_n &= 0,5 \cdot a_0, \text{ für } n = 0, \\
 c_n &= 0,5 \cdot (a_n + j \cdot b_n), \text{ für } n < 0.
 \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass gilt: $c_{-n} = c_n^*$. Der Ausdruck c_n^* ist die konjugiert komplexe Größe von c_n . In der Literatur [5,6,8] findet man verschiedene berechnete Beispiele.

2.1.2 Fourier-Analyse aperiodischer Signale

Auch nichtperiodische Signale kann man einer Fourier-Analyse unterziehen. Dieser Vorgang wird als **Fourier-Transformation** bezeichnet. Man sagt auch das Zeitsignal $f(t)$ wird in den Frequenzbereich transformiert.

Die Transformationsbeziehung, die auch als Fourier-Integral bezeichnet wird, hat die Gestalt

$$\left| F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt \right| \quad \text{Gl.(2.11)}$$

$F(j\omega)$ wird als Fourier-Transformierte von $f(t)$ bezeichnet

Symbolisch wird der Zusammenhang zwischen Zeitfunktion und zugehörige Fourier-Transformierte wie folgt dargestellt:

$$f(t) \text{ --- } \bullet \text{ --- } F(j\omega)$$

Die Fourier-Transformation ist immer möglich, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \cdot dt < \infty.$$

Das Integral über den Betrag der Funktion $f(t)$ muss also existieren, es darf nicht unendlich werden

Umgekehrt kann man auch ausgehend von einer Fourier-Transformierten $F(j\omega)$ die zugehörige Zeitfunktion $f(t)$ berechnen. Dies wird mit dem nachstehenden Umkehrintegral durchgeführt.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j \cdot \omega) \cdot e^{j \cdot \omega t} \cdot d\omega \quad \text{Gl.(2.12)}$$

Beispiel 2.5:

Bei diesem Beispiel wird ein Rechteckimpuls, der symmetrisch ist zum Nullpunkt der Zeitachse ist, einer Fourier-Transformation unterworfen

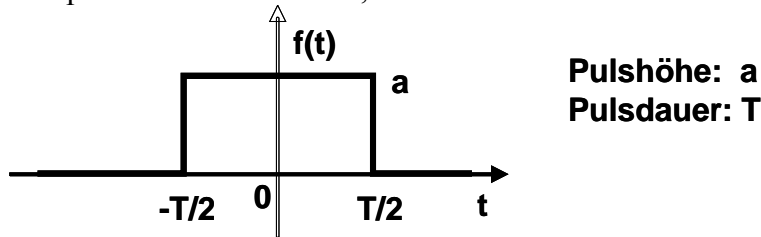


Bild 2.14: Rechteckimpuls symmetrisch zur Ordinate

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-j \cdot \omega t} dt = \int_{-T/2}^{+T/2} a \cdot e^{-j \cdot \omega t} dt = a \cdot \left. \frac{-1}{j \cdot \omega} \cdot e^{-j \cdot \omega t} \right|_{-T/2}^{+T/2} = \frac{a}{j \cdot \omega} \left[-e^{-j \cdot \omega T/2} + e^{j \cdot \omega T/2} \right]$$

$$F(j\omega) = \frac{2a (e^{j \cdot \omega T/2} - e^{-j \cdot \omega T/2})}{\omega \cdot 2j} = \frac{2a}{\omega} \cdot \sin(\omega \cdot T/2) \quad , \text{ siehe Gln. (2.7).}$$

Die obige Beziehung führt zu einer Standardfunktion. Es gilt

$$F(j\omega) = T \cdot a \cdot \frac{\sin(\omega \cdot T/2)}{\omega \cdot T/2} = T \cdot a \cdot \text{si}(\omega \cdot T/2)$$

Die si-Funktion ist die Abkürzung für die $\sin(x)/x$ – Funktion.

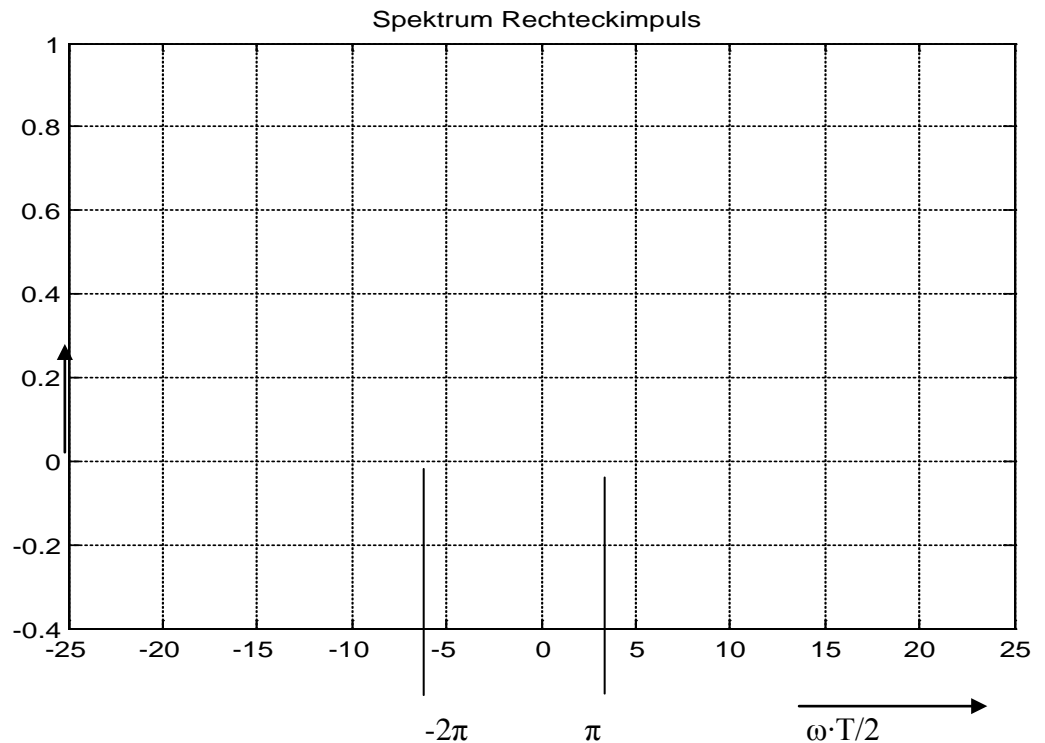


Bild 2.15: Spektrum des Rechteckimpulses

Das Bild zeigt die Funktion $F(j\omega)/(T a)$.

Die obige Funktion enthält die Information über das Amplituden- und das Phasenspektrum. Der Betrag der Funktion ist das Amplitudenspektrum. Das Phasenspektrum hat den Wert 0° wenn die obige Funktion positiv ist. Die Phase ist 180° bei negativen Werten.

Interessant ist, dass das Spektrum einer nichtperiodischen Funktion Anteile bei allen Frequenzen besitzt. Bei den periodischen Funktionen ist dies nicht der Fall, sie haben diskrete Spektrallinien bei der Grundwelle und den Oberwellen.

Das Amplitudenspektrum nimmt mit wachsender Frequenz stark ab. Man kann daraus erkennen welcher Frequenzbereich von einem System übertragen werden muss, wenn der Rechteckimpuls beim Durchlaufen des Systems nicht allzu sehr verändert werden darf.

Beispiel 2.6:

Es wird das Spektrum eines Rechteckimpulses berechnet, der zum Zeitpunkt Null beginnt.

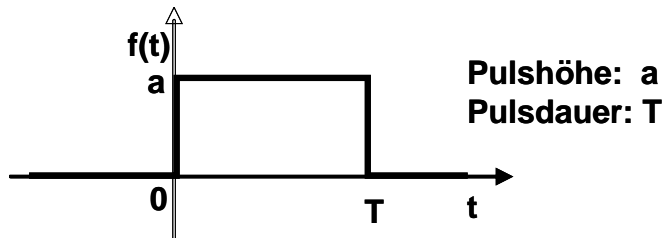


Bild 2.16: Rechteckimpuls bei $t = 0$ beginnend

Die Berechnung wird wie beim vorigen Beispiel 2.5 durchgeführt. Man erhält als Ergebnis:

$$F(j \cdot \omega) = a \cdot T \cdot \text{si}(\omega \cdot T / 2) \cdot e^{-j \omega T / 2}$$

Der erste Teil des Ergebnisses ist identisch mit dem Ergebnis von Beispiel 2.5. Zusätzlich tritt noch eine Phasenverschiebung auf, mit dem Verlauf $-\omega \cdot T / 2$. Das Amplitudenspektrum ist daher identisch mit dem von Beispiel 2.5. Beim Phasenspektrum addiert sich die zusätzliche frequenzabhängige Phasenverschiebung $-\omega \cdot T / 2$ zu dem Phasenverlauf vom vorigen Beispiel.

Beispiel 2.7:

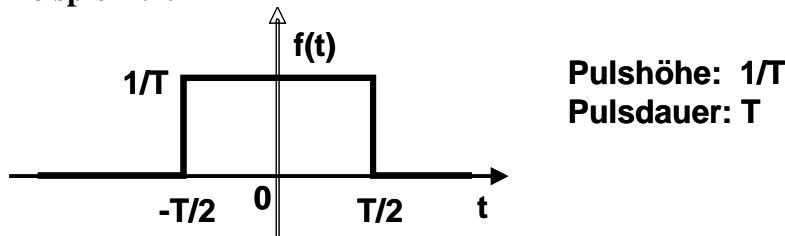


Bild 2.17: Übergang von einem zur Ordinate symmetrischen Rechteckimpuls zum Einheitsimpuls

Das Beispiel 2.5 wird zum Einheitspuls festgelegt. Die Pulsdauer ist T , die Pulshöhe $1/T$. Damit ist die Pulsfläche immer 1. Reduziert man bei konstanter Pulsfläche die Pulsdauer T , dann wächst die Pulshöhe. Im Extremfall geht die Pulsdauer $T \rightarrow 0$ und die Pulshöhe gegen Unendlich. Man erhält den **idealen Einheitsimpuls**, der auch als **Dirac-Stoß** bezeichnet wird.

Beim Spektrum (Bild 2.15) liegen die ersten Nulldurchgänge bei $\omega \cdot T / 2 = \pm \pi$ also bei $\omega = \pm \pi / T$. Für $T \rightarrow 0$ gehen diese Durchtrittsfrequenzen gegen unendlich. Bei genauerer Betrachtung erhält man das Spektrum nach Bild 2.18.

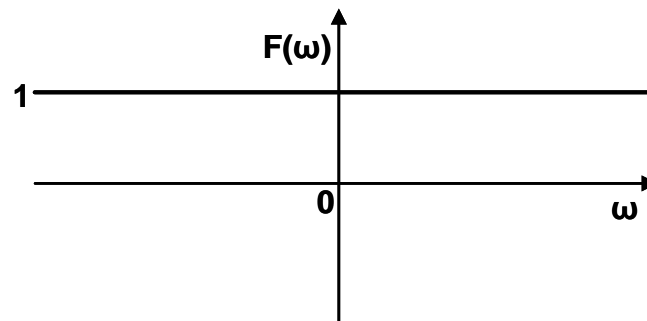


Bild 2.18: Spektrum des Dirac-Stoßes

Das Spektrum enthält alle Frequenzen mit der gleichen Amplitudendichte. Die Phase ist durchweg Null. Erregt man ein System am Eingang mit dem Dirac-Stoß, dann wird jede Frequenz gleich wirksam angeregt. Das Spektrum des Ausgangssignals zeigt dann nur die Eigenschaften des Systems. Für theoretische Betrachtungen in der Systemtheorie wird deshalb der Dirac-Stoß öfters angewendet.

Zusammengefasst zeigt sich, dass sowohl die periodischen Funktionen wie auch die aperiodischen Funktionen sich als eine Summe von sinusförmigen Signalen darstellen lassen. Kennt man also die Reaktion eines Systems auf sinusförmige Eingangssignale, dann lässt sich damit das Verhalten des Systems abschätzen bzw. berechnen.

Übungsaufgabe 2.3:

Die Spannung

$$u(t) = 5V \cdot e^{-2 \cdot t / \text{sec}}, \text{ für } t \geq 0 \text{ sec und } u(t) = 0V, \text{ für } t < 0 \text{ sec}$$

soll mit der Fourier-Transformation in den Frequenzbereich transformiert werden.

- a.) Skizzieren Sie die Funktion $u(t)$!
 - b.) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte der Funktion $u(t)$!
 - c.) Skizzieren Sie das Spektrum der Fourier-Transformierten (Amplitudenspektrum und Phasenspektrum) !
-

2.2 Laplace-Transformation

Die Laplace-Transformation ist ein sehr wertvolles Hilfsmittel zur Berechnung der Ausgangsfunktionen von Übertragungsgliedern. Ist also die Eingangsfunktion und der Frequenzgang (Übertragungsfunktion) des Übertragungsgliedes bekannt, dann kann man damit meist die Ausgangsfunktion, z.B. Sprungantwort berechnen. Damit ist die Laplace-Transformation (L-Transformation) auch zur Berechnung von Einschwingvorgängen bei elektrischen Netzwerken sehr gut geeignet.

2.2.1 Begriff und Sinn einer Transformation

Der Begriff und Sinn einer Transformation wird an einem Beispiel erklärt. Es ist das Produkt $z = a \cdot b$ zu bilden. Dies ist direkt (ohne Transformation) oder indirekt über eine Transformation möglich.

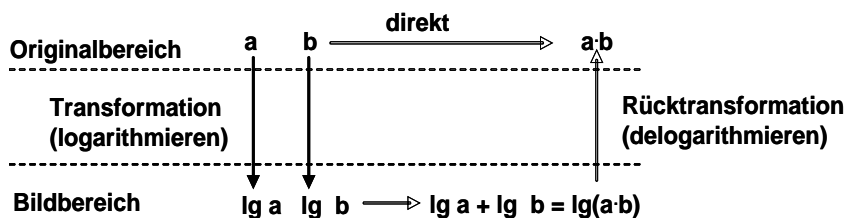


Bild 2.19: Prinzip der Transformation und Rücktransformation

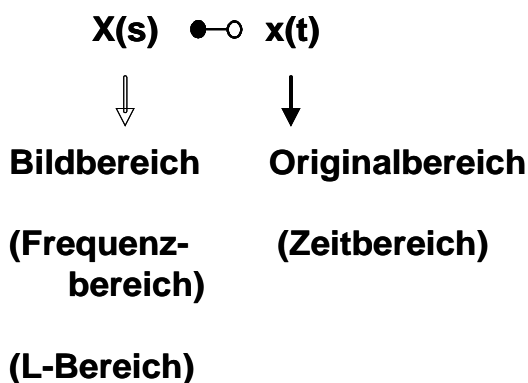
Das Transformieren bzw. Rücktransformieren kann bei diesem Beispiel mit einer Logarithmentafel vorgenommen werden. Bei der Laplace-Transformation wird entsprechend vorgegangen. Der Vorteil von Transformationen liegt oft darin, dass die Berechnungen im Bildbereich einfacher sind als im Originalbereich (siehe oben, statt multiplizieren addieren).

2.2.2 Laplace-Transformation einer Zeitfunktion

Hat man im Originalbereich eine Zeitfunktion $x(t)$, dann kann diese mit der Transformationsbeziehung (Laplace-Integral)

$$X(s) = L\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt \quad \text{Laplace-Transformation} \quad \text{Gl. (2.13)}$$

In den Bildbereich transformiert werden. $X(s)$ ist die Laplace-Transformierte von $x(t)$. Man kürzt dies auch so ab:



$s = \sigma + j\omega$; s ist eine komplexe Größe mit dem Realteil σ und dem Imaginärteil ω .

Beispiel 2.8: L-Transformation eines Sprunges: $x(t)=a \cdot \sigma(t)$

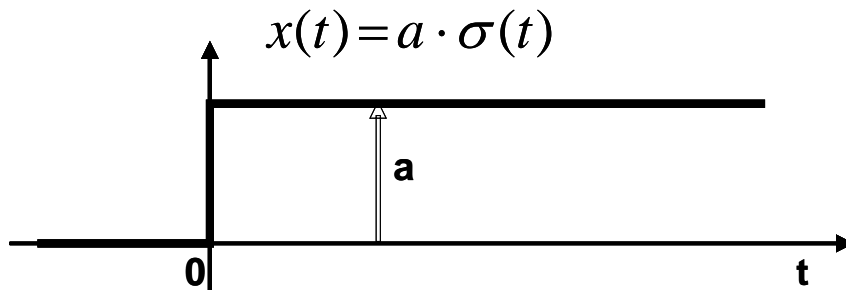


Bild 2.20: Sprungfunktion

$$X(s) = L\{a \cdot \sigma(t)\} = \int_0^{\infty} a \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt$$

$$X(s) = \int_0^{\infty} a \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt = a \left[-\frac{1}{s} \cdot e^{-s \cdot t} \right]_0^{\infty}$$

$$X(s) = a \left[-\frac{1}{s} \cdot e^{-s \cdot \infty} + \frac{1}{s} \cdot e^{-s \cdot 0} \right] = a \cdot \left[-\frac{1}{s} \cdot 0 + \frac{1}{s} \cdot 1 \right] = a \cdot \frac{1}{s}$$

Man darf den Realteil von s also σ immer so wählen, dass das Laplace-Integral (Gl. 2.13) konvergiert. Bei diesem Beispiel ist σ positiv, damit ist $e^{-s \cdot \infty} = 0$.

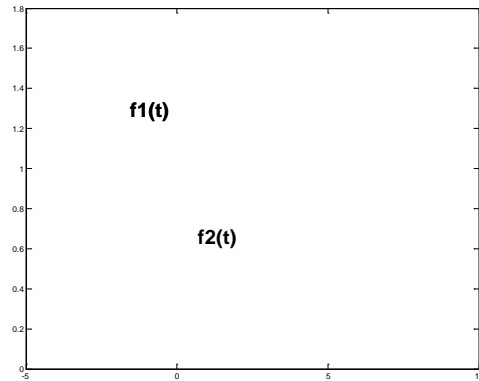
$$\Rightarrow X(s) = L\{a \cdot \sigma(t)\} = a \cdot \frac{1}{s} \text{ bzw. } a \cdot \frac{1}{s} \quad \bullet \text{ } a \cdot \sigma(t)$$



Übungsaufgabe 2.4:

Die L-Transformierte der Funktion $x(t) = k \cdot e^{-\alpha \cdot t}$ ist zu berechnen.

Wie im Beispiel gezeigt, lassen sich Zeitfunktionen über eine Integration Laplace-transformieren. Da die Integration nur im Zeitbereich $t = 0$ bis $t = \infty$ erfolgt (Integrationsgrenzen!), wird nur der Verlauf der Zeitfunktion $x(t)$ zwischen $t = 0$ und $t = \infty$ bei der Laplace-Transformation berücksichtigt. Haben also zwei Zeitfunktionen für $t = 0$ bis $t = \infty$ den gleichen Verlauf, unterscheiden sich jedoch im Zeitbereich $t = -\infty$ bis $t = 0$, so haben sie dieselbe L-Transformierte.

Beispiel:**Bild 2.21: 2 Funktionen, die sich nur für $t < 0$ unterscheiden**

$f_1(t)$ und $f_2(t)$ haben dieselbe L-Transformierte.

$F(s) \bullet \text{---} \circ$ $f_1(t)$ $f_1(t) \neq f_2(t)$ für $t < 0$

$F(s) \bullet \text{---} \circ$ $f_2(t)$ $f_1(t) = f_2(t)$ für $t \geq 0$

Im weiteren soll deshalb meist vorausgesetzt werden, dass die Zeitfunktionen für $t < 0$ gleich Null sind.

Für die wichtigsten Zeitfunktionen sind in der Tabelle 2.1 (Korrespondenztabelle) die L-Transformierten angegeben (Nr. 1 ... 23). Am Ende der Tabelle 2.1 sind einige wichtige Regeln der Laplace-Transformation angegeben (Nr. 24 ... 29).

Beispiel 2.9: Laplace-Transformation mit Tabelle 2.1

:

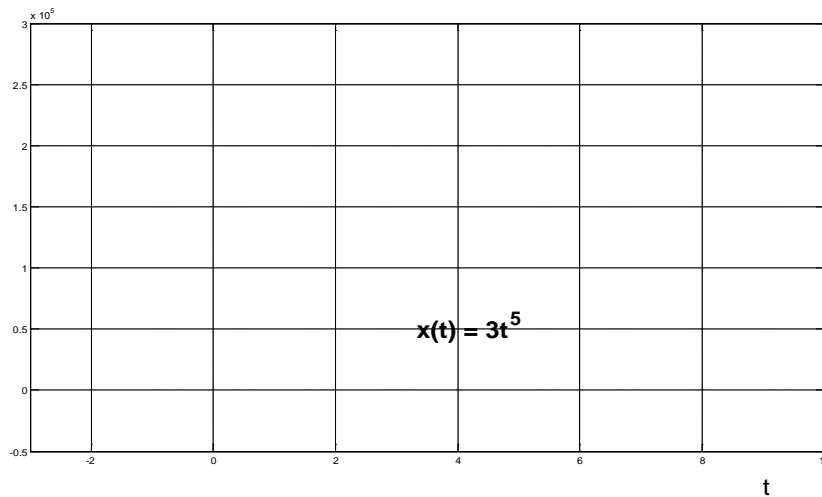


Bild 2.22: Zeitfunktion $x(t) = 3t^5$

L-Transformation:

$$L\{3 \cdot t^5\} = 3 \cdot L\{t^5\} = 3 \cdot \frac{5!}{s^6}$$

mit Tabelle 2.1, Formel Nr. 6 : $L\{t^5\} = \frac{5!}{s^6}$.

$$X(s) = 3 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{s^6} = \frac{360}{s^6}$$



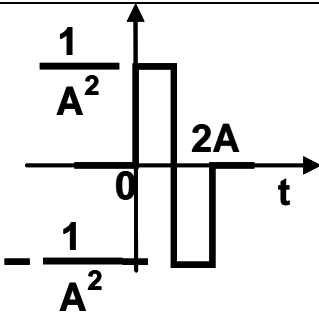
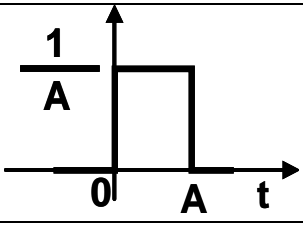
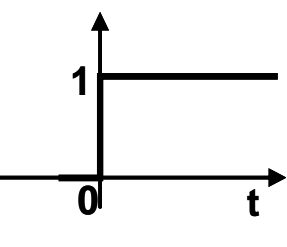
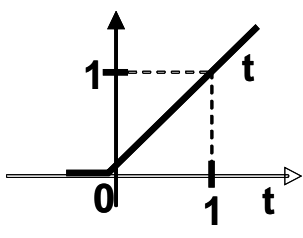
Übungsaufgabe 2.5:

Welche Zeitfunktion $x(t)$ gehört zur L-Transformierten

$$X(s) = \frac{s}{s^2 + 9} \frac{1}{\sec^2} ?$$

b) Zeichnen Sie die Funktion $x(t)$, $x(t) = 0$ für $t < 0$!

Tabelle 2.1: Laplace-Transformations-Tabelle

Nr.	F(s)	f(t)
1	s	 <p>Einheits-Doppelimpuls $\lim A \rightarrow 0$</p>
2	1	 <p>Einheits-Impuls $\lim A \rightarrow 0$</p>
3	$\frac{1}{s}$	 <p>Einheitssprung</p>
4	$\frac{1}{s^2}$	 <p>Einheitsrampe</p>
5	$\frac{1}{s^n}$	$\frac{1}{(n-1)!} \cdot t^{n-1}$
6	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	t^n
7	$\frac{K}{s + \alpha}$	$K \cdot e^{-\alpha t}; \alpha = konst.$
8	$\frac{1}{(s + \alpha)^2}$	$t \cdot e^{-\alpha t}; \alpha = konst.$

9	$\frac{1}{(s + \alpha)^n}$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} \cdot e^{-\alpha t}; \alpha = konst.$
10	$\frac{n!}{(s + \alpha)^{n+1}}$	$t^n \cdot e^{-\alpha t}; \alpha = konst.$
11	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\sin(\omega \cdot t)$
12	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\cos(\omega \cdot t)$
13	$\frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$	$e^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega \cdot t); \alpha = konst.$
14	$\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$	$e^{-\alpha t} \cdot \cos(\omega \cdot t); \alpha = konst.$
15	$\frac{s + \alpha}{s^2 + \omega^2}$	$\cos(\omega \cdot t) + \frac{\alpha}{\omega} \cdot \sin(\omega \cdot t)$
16	$\frac{1}{s \cdot (s + \alpha)}$	$\frac{1}{\alpha} \cdot (1 - e^{-\alpha t}); \alpha = konst.$
17	$\frac{(s + \beta)}{s \cdot (s + \alpha)}$	$\frac{\beta}{\alpha} + (1 - \frac{\beta}{\alpha}) e^{-\alpha t}; \alpha = konst.$ $\beta = konst.$
18	$\frac{(s + \beta)}{s \cdot (s + \alpha)^2}$	$\frac{\beta}{\alpha^2} + (\frac{\alpha - \beta}{\alpha} \cdot t - \frac{\beta}{\alpha^2}) \cdot e^{-\alpha t};$ $\alpha = konst.; \beta = konst.$
19	$\frac{1}{s \cdot (s + \alpha)^2}$	$\frac{1}{\alpha^2} [1 - (1 + \alpha \cdot t) \cdot e^{-\alpha t}];$ $\alpha = konst..$
20	$\frac{1}{s \cdot (s + \alpha) \cdot (s + \beta)}$	$\frac{1}{\alpha \cdot \beta} + \frac{\beta \cdot e^{-\alpha t} - \alpha \cdot e^{-\beta t}}{\alpha \cdot \beta \cdot (\alpha - \beta)}$ $\alpha = konst.; \beta = konst.$

21	$\frac{1}{(s + \alpha) \cdot (s + \beta)}$	$\frac{1}{\alpha - \beta} \cdot (e^{-\beta t} - e^{-\alpha t})$ $\alpha = \text{konst.}; \beta = \text{konst.}$
22	$\frac{(s + \gamma)}{s \cdot (s + \alpha) \cdot (s + \beta)}$	$\frac{\gamma}{\alpha \cdot \beta} + \frac{\gamma - \beta}{\beta \cdot (\beta - \alpha)} e^{-\beta t} + \frac{\gamma - \alpha}{\alpha \cdot (\alpha - \beta)} e^{-\alpha t}$ $\alpha = \text{konst.}; \beta = \text{konst.}; \gamma = \text{konst.}$
23	$\frac{\omega_0^2}{s \cdot (s^2 + 2 \cdot d \cdot \omega_0 \cdot s + \omega_0^2)}$ mit $\omega_0 = \frac{1}{T}$ und $d < 1$	$\left[1 + \frac{1}{\sqrt{1-d^2}} e^{-d \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot \sin(\omega_0 \cdot \sqrt{1-d^2} \cdot t - \varphi) \right]$ mit $\varphi = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-d^2}}{-d}\right)$ und $90^\circ < \varphi < 180^\circ$
24	$s \cdot F(s)$	$\frac{d}{dt} f(t)$
25	$\frac{1}{s} F(s)$	$\int_0^t f(t) \cdot dt$
26	$e^{-\tau s} F(s)$	$f(t - \tau)$
27	$\alpha \cdot F(\alpha \cdot s)$	$f\left(\frac{t}{\alpha}\right)$
28	$\frac{dF(s)}{ds}$	$-t \cdot f(t)$
29	$\int_s^\infty F(s) \cdot ds$	$\frac{1}{t} \cdot f(t)$

2.2.3 Wichtige Regeln der L-Transformation

Um die L-Transformation anwenden zu können, z.B. zum Lösen von Differenzialgleichungen, werden im Anschluss einige wichtige Regeln behandelt.

a.) Differenziation im Zeitbereich

Gegeben sei die Zeitfunktion $x(t)$ und damit die zugehörige L-Transformierte .

Gefragt ist: welche L-Transformierte gehört dann zu $\frac{dx(t)}{dt}$?

Es gilt: $X(s) \bullet \text{---} \circ x(t)$

$$s \cdot X(s) - x(+0) \bullet \text{---} \circ \frac{dx(t)}{dt} \quad \text{Differenziationsregel} \quad \text{Gl. (2.14)}$$

$x(+0)$ ist der Anfangswert von $x(t)$

Verallgemeinert auf höhere Ableitungen folgt entsprechend:

$$s^n \cdot X(s) - s^{n-1} \cdot x(+0) - s^{n-2} \cdot x'(+0) - \dots - x^{(n-1)}(+0) \bullet \text{---} \circ \frac{d^n x(t)}{dt^n}, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

Gl. (2.15)



Übungsaufgabe 2.6:

Zu $\sin(\omega t)$ gehört die L-Transformierte $\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$. Welche L-Transformierte gehört dann zu $\cos(\omega t)$?



Übungsaufgabe 2.7:

Einheitssprung $x_1(t) = \sigma(t)$ hat die L-Transformierte $1/s$. Welche Zeitfunktion $x_2(t)$ gehört zur L-Transformierten $X(s) = 1$?

b.) Integration im Zeitbereich

Gegeben: $x(t) \circ \text{---} \bullet X(s)$, gesucht: $\int_0^t x(t) dt \circ \text{---} \bullet ?$

Die Integration ist die Umkehrung der Differenziation. Hier gilt daher:

$$x(t) \circ \text{---} \bullet X(s) .$$

$$\int_0^t x(t) dt \circ \text{---} \bullet \frac{1}{s} \cdot X(s) \quad \text{Integrationsregel} \quad \text{Gl. (2.16)}$$

Entsprechend folgt dann für die Mehrfachintegration, z.B. Dreifachintegration:

$$\int_0^t \int_0^t \int_0^t x(t) dt \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{1}{s^3} \cdot X(s) \quad .$$

Beispiel 2.10: Wenn man den Einheitssprung integriert, erhält man eine Einheitsrampe.

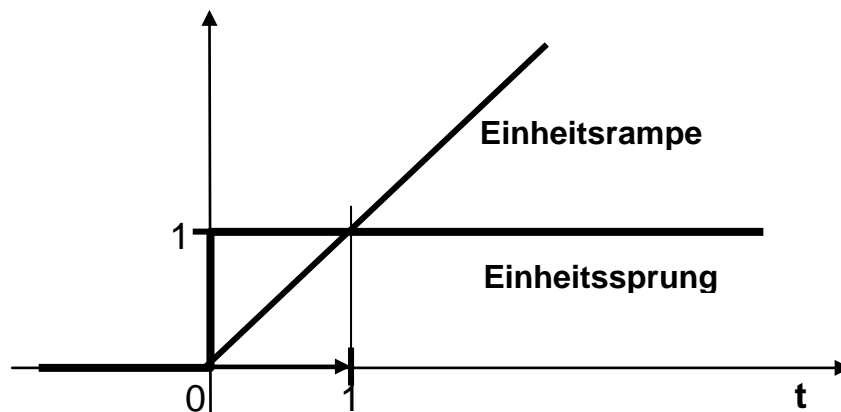


Bild 2.23: Einheitsrampe als Integration des Einheitssprunges

Sie hat folgende L-Transformierte:

$$\sigma(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{1}{s}$$

$$\int_0^t \sigma(t) \cdot dt \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$

c.) Verschiebung einer Zeitfunktion

Wird eine Funktion z.B. $x_1(t)$ um die Zeit τ verschoben aber ansonsten nicht verändert, dann gilt: $x_2(t) = x_1(t-\tau)$ mit $\tau \geq 0$; $x_1(t)=0$ für $t < 0$.

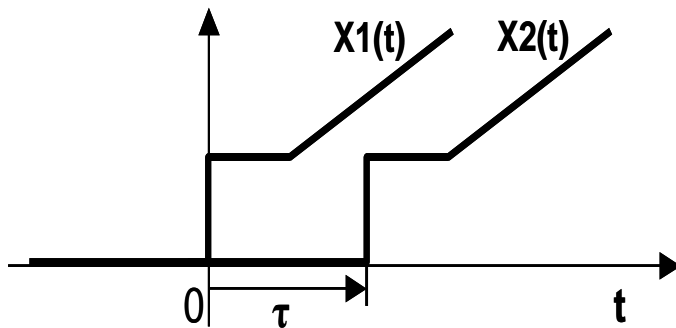


Bild 2.24: Funktion $x_1(t)$ und deren Verschiebung um die Zeit τ

Hier erhält man für die L-Transformation:

$$\begin{array}{l}
 x_1(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad X_1(s) . \\
 x_2(t) = x_1(t-\tau) \quad \circ \text{---} \bullet \quad X_1(s) \cdot e^{-\tau \cdot s} \quad \text{Verschiebungsregel!} \quad \text{Gl. (2.17)}
 \end{array}$$



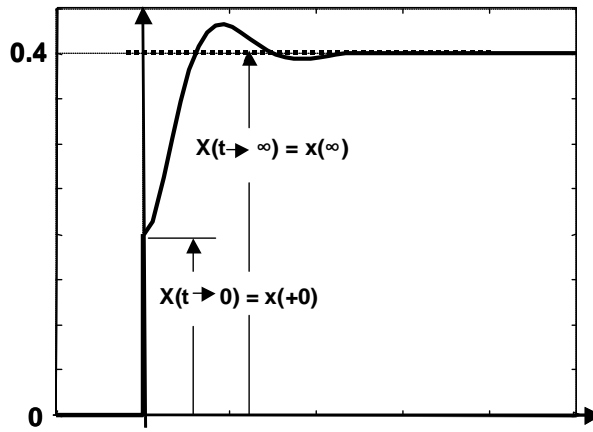
Übungsaufgabe 2.8:

Am Eingang eines Totzeitgliedes mit der Totzeit $T_t = 5 \text{ sec}$ wird die Zeitfunktion $x(t) = e^{-\frac{2}{\text{sec}} \cdot t}$ aufgeschaltet. Ein Totzeitglied verändert die Form des Signales $x(t)$ nicht. Das Eingangssignal $x(t)$ wird um die Totzeit T_t (Laufzeit) vom Eingang zum Ausgang verzögert; $y(t) = x(t - T_t)$, $T_t \geq 0$



- a) Welche L-Transformation $X(s)$ hat die Eingangsfunktion?
 - b) Bestimmen sie die L-Transformation der Ausgangsfunktion
-

d.) Anfangswert- und Endwertsatz



Die Funktion $x(t)$ strebt von positiven t -Werten herkommend für $t \rightarrow 0$ gegen den Wert $x(+0)$

$$\lim_{t \rightarrow +0} x(t) = x(+0) .$$

$x(+0)$ ist der Anfangswert von $x(t)$.

Bild 2.25: Anfangswert bei +0 und Endwert einer Funktion

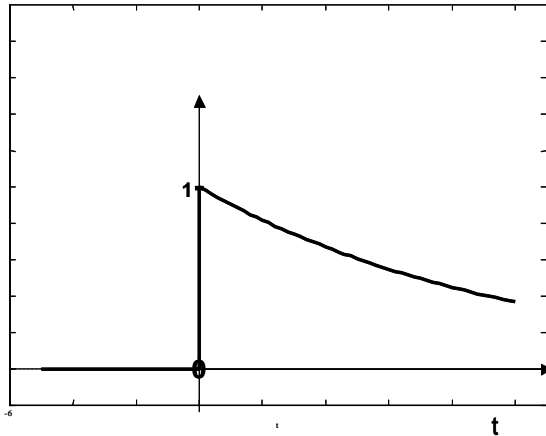
Für $t \rightarrow \infty$ strebt $x(t)$ gegen $x(\infty)$: $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x(\infty)$

$x(\infty)$ ist der Endwert von $x(t)$. Ist $x(+0)$ bzw. $x(\infty)$ endlich – also nicht ∞ , dann kann man aus der L-Transformierten von $x(t)$ $\bigcirc \text{---} \bullet X(s)$ direkt $x(+0)$ bzw. $x(\infty)$ berechnen.

$$x(+0) = \lim_{s \rightarrow \infty} [s \cdot X(s)] \quad \text{Anfangswertsatz} \quad \text{Gl. (2.18)}$$

$$x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot X(s)] \quad \text{Endwertsatz} \quad \text{Gl. (2.19)}$$

Beispiel 2.11:



Gegeben: $x(t) = e^{-\frac{t}{T}}$ für $t \geq 0$, $x(t) = 0$ für $t < 0$.

Daraus folgt:

Anfangswert $x(+0) = e^{-\frac{0}{T}} = 1$

Endwert: $x(\infty) = e^{-\frac{\infty}{T}} = 0$

Gesucht: Anfangs- und Endwert sind mit dem Anfangs- und Endwertsatz zu überprüfen.

Bild 2.26: Exponentiell abklingende Funktion

Lösung

$$x(t) = e^{-\frac{t}{T}} = e^{-\alpha \cdot t}, \alpha = \frac{1}{T}$$

Mit Formel 7 in Tabelle 2.1 folgt:

$$X(s) = \frac{1}{s + \alpha} = \frac{1}{s + \frac{1}{T}} = \frac{T}{T \cdot s + 1}$$

Bestimmung des Anfangswertes mit Anfangswertsatz:

$$x(+0) = \lim_{s \rightarrow \infty} (s \cdot X(s)) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s \cdot T}{s \cdot T + 1} = 1 \quad ; \quad \text{stimmt!}$$

Bestimmung des Endwertes mit dem Endwertsatz:

$$x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} (s \cdot X(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot T}{s \cdot T + 1} = 0 \quad ; \quad \text{stimmt!}$$

3 Mathematische Beschreibung von Übertragungsgliedern (Systeme)

In diesem Abschnitt werden verschiedene Methoden gezeigt, mit denen man in der Lage ist das Verhalten von Übertragungsgliedern zu beschreiben. Anhand eines einfachen Übertragungsgliedes (RL-Glied) werden die Methoden demonstriert.

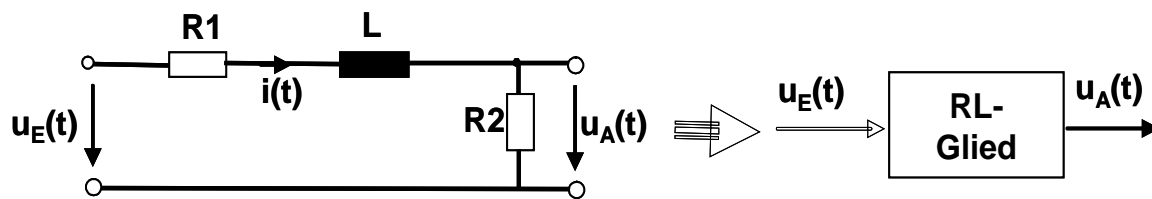


Bild 3.1: RL-Glied mit Übergang zu Blockdarstellung

Am Ausgang wird das RL Glied nicht belastet, d.h. der Strom $i(t)$ fließt durch alle drei Bauelemente

Die Betrachtungen beschränken sich auf **Lineare Zeitinvariante Systeme (LTI-Systeme)**.

Zeitinvarianz:

Hat ein Übertragungsglied das Eingangssignal $y(t)$ und das Ausgangssignal $x(t)$, dann ist es zeitinvariant, wenn ein bestimmt geformtes Eingangssignal $y(t)$ unabhängig vom Zeitpunkt, an dem es aufgeschaltet wird, immer das gleiche Ausgangssignal $x(t)$ erzeugt. Die Eigenschaften des Systems verändern sich also nicht im Laufe der Zeit. Das RL-Glied ist zeitinvariant, wenn die Werte der drei Bauelemente nicht zeitabhängig sind.

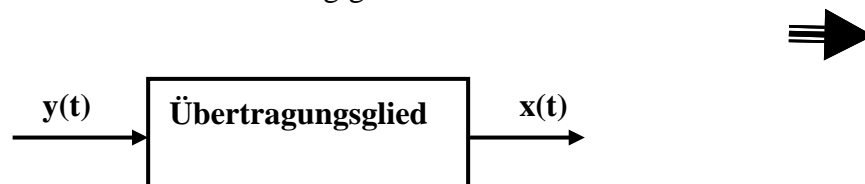


Bild 3.2: Übertragungsglied in Blockdarstellung

Linearität:

Ein lineares System erfüllt das Überlagerungsprinzip und das Verstärkerprinzip.

$y_1(t)$ und $y_2(t)$ seien Eingangssignale; $x_1(t)$ und $x_2(t)$ die zugehörigen Ausgangssignale.

Verstärkerprinzip: $y_1(t) \implies x_1(t), \quad k \cdot y_1(t) \implies k \cdot x_1(t).$

k ist der Verstärkungsfaktor.

Überlagerungsprinzip: $y_1(t) \implies x_1(t), \quad y_2(t) \implies x_2(t),$
 $y_1(t) + y_2(t) \implies x_1(t) + x_2(t).$

Das RL-Glied ist linear, wenn die drei Bauelemente, unabhängig vom durchfließenden Strom $i(t)$, ihre Werte nicht verändern.

3.1 Differenzialgleichung

LTI-Systeme werden in ihrem Verhalten durch gewöhnliche lineare Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten $a_0 \dots a_n$ beschrieben (Gl. 3.1).

$$a_n \cdot x^{(n)} + a_{n-1} \cdot x^{(n-1)} + a_{n-2} \cdot x^{(n-2)} + \dots + a_1 \cdot x' + a_0 \cdot x = y(t)$$

Gl.(3.1)

$y(t)$ ist die Eingangsfunktion des Übertragungsgliedes; $x(t)$ die Ausgangsfunktion, $x^{(n)}$ stellt die n -te. Ableitung der Ausgangsfunktion $x(t)$ nach der Zeit t dar; $y(t)$ wird in den mathematischen Lehrbüchern [7] auch als Störfunktion bezeichnet. Die höchste Ableitung der Ausgangsfunktion bestimmt die Ordnung der Differenzialgleichung (Dgl.).

Ist die Eingangsfunktion $y(t)$ für $t \geq 0$ bekannt und kennt man auch die Anfangswerte der Ausgangsfunktion zum Zeitpunkt Null $x(+0), x'(+0), \dots, x^{(n)}(+0)$, dann kann man den Verlauf von $x(t)$ für $t \geq 0$ berechnen. Man sagt auch die Dgl. kann gelöst werden.

Der allgemeine Lösungsweg wird kurz aufgezeigt, er ist in mathematischen Lehrbüchern [7] ausführlich dargestellt.

Die Lösung besteht aus zwei Anteilen, der homogenen Lösung $x_h(t)$ und der partikulären Lösung $x_p(t)$.

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t).$$

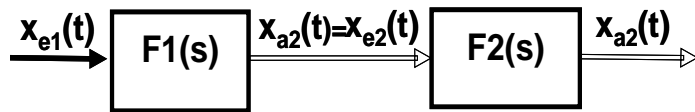
Homogene Lösung:

Der homogene Anteil der Dgl. hat die Gestalt:

•

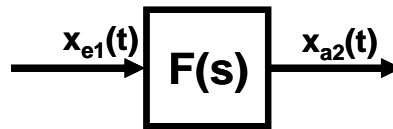
6.1 Reihenschaltung

Anhand von zwei Übertragungsgliedern wird diese Struktur vorgestellt.



Die zwei in Serie geschalteten Blöcke lassen sich zu einem Block zusammenfassen.

$$F(s) = F1(s) \cdot F2(s)$$



Die Übertragungsfunktionen bzw. Frequenzgänge der in Serie geschalteten Blöcke werden bei der Zusammenfassung miteinander multipliziert.

In Exponentialform geschrieben, gilt daher

$$F1(j\omega) = |F1(j\omega)| \cdot e^{j\phi1(\omega)}, \quad F2(j\omega) = |F2(j\omega)| \cdot e^{j\phi2(\omega)}$$

Zusammengefasst

$$F(j\omega) = F1(j\omega) \cdot F2(j\omega) = |F1(j\omega)| \cdot |F2(j\omega)| \cdot e^{j(\phi1(\omega) + \phi2(\omega))}$$

Daraus folgt

$$\text{Betrag der Reihenschaltung: } |F(j\omega)| = |F1(j\omega)| \cdot |F2(j\omega)|.$$

$$\text{Phase der Reihenschaltung: } \varphi(\omega) = \varphi1(\omega) + \varphi2(\omega).$$

Im Bode-Diagramm gilt

Betrag:

$$\frac{|F(j\omega)|}{dB} = 20 \lg |F(j\omega)| = 20 \lg |F1(j\omega)| + 20 \lg |F2(j\omega)|$$

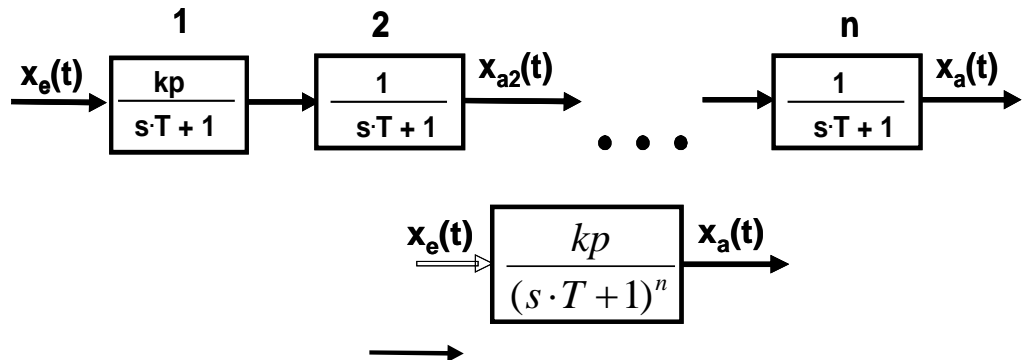
$$\text{Phase: } \varphi(\omega) = \varphi1(\omega) + \varphi2(\omega).$$

Im Bode-Diagramm ist die Zusammenfassung besonders einfach. Die Beträge

in dB werden, wie auch die Phasenwinkel in grd oder rad, einfach addiert.

Beispiel 6.1: PTn-Glied

Beim PTn-Glied sind n PT1-Glieder mit der gleichen Zeitkonstante T in Serie geschaltet.



**Bild 6.1: oben: Hintereinanderschaltung von n PT1-Gliedern
unten: Zusammenfassung der n PT1-Glieder zu einem PTn-Glied**

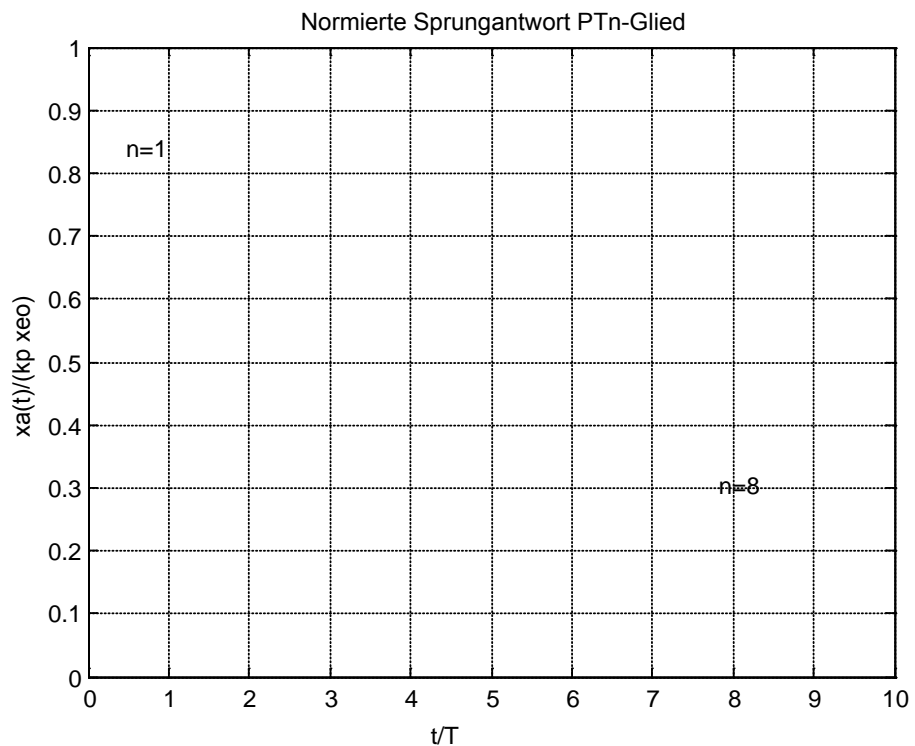


Bild 6.2: normierte Sprungantwort für PTn-Glieder für n von 1 bis 8.

Das Bild 6.2 zeigt, dass mit wachsendem n-Wert die Verzögerung zwischen Eingang- und Ausgangssignal zunimmt.

Bild 6.3 zeigt das normierte Bode-Diagramm des PTn-Gliedes. Für die Darstellung des Betrages und der Frequenzachse gilt

$$\text{Normierter Betrag: } \frac{|F(j\omega)|}{(kp \cdot x_{eo})} \quad , \quad \text{Normierte Frequenz: } \omega \cdot T.$$

Das PTn-Glied stellt einen Tiefpass dar. Ab etwa der Kreisfrequenz $\omega = 1/T$ bzw. $\omega \cdot T = 1$ werden die höheren Frequenzanteile mit wachsender Frequenz zunehmend stärker gedämpft. Die Dämpfung fällt umso stärker aus je größer n ist. Die Phasenverschiebung nimmt mit wachsender Frequenz und mit größer werdendem n betragsmäßig ebenfalls zu. Es gilt für die Phasenverschiebung

$$\varphi(\omega) = -n \cdot \arctan(\omega \cdot T)$$

Die Phasenbeziehung müsste linear sein, wenn jeder Frequenzanteil um die gleiche Zeit verzögert werden sollte, so wie beim Totzeitglied. Das PTn-Glied stellt daher keinen idealen Tiefpass dar.

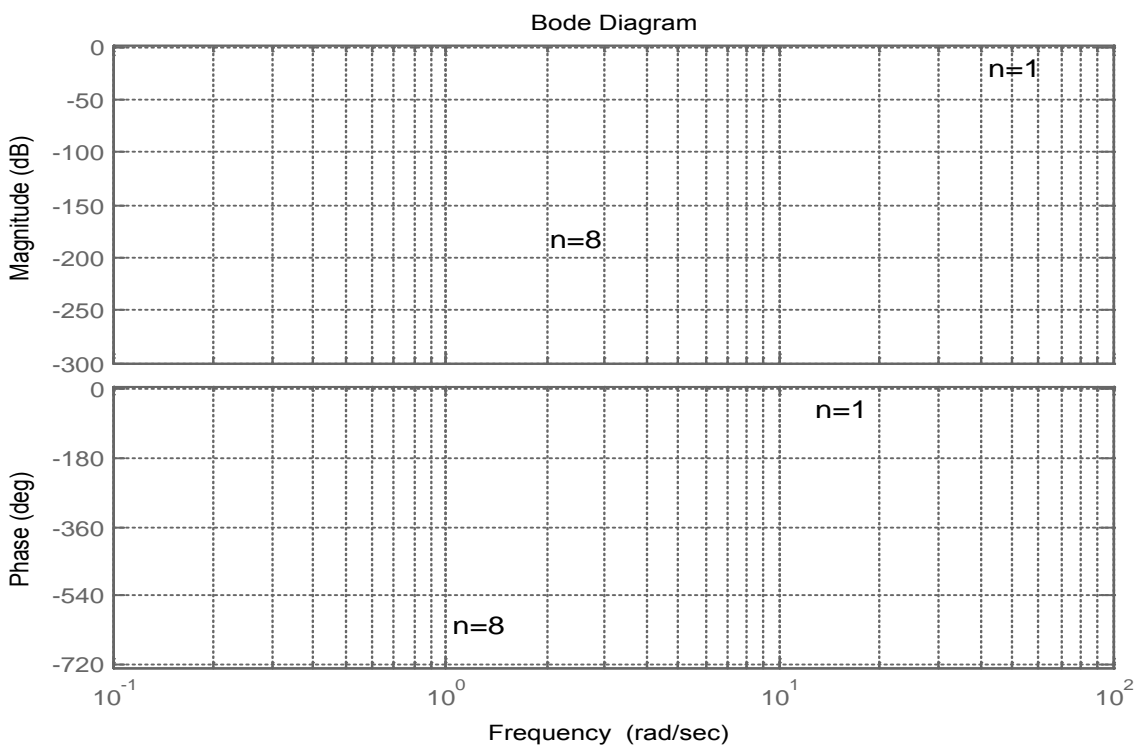


Bild 6.3: normiertes Bode-Diagramm für n von 1 bis 8.

Ein idealer Tiefpass hätte folgenden Betragsverlauf und Phasenverlauf

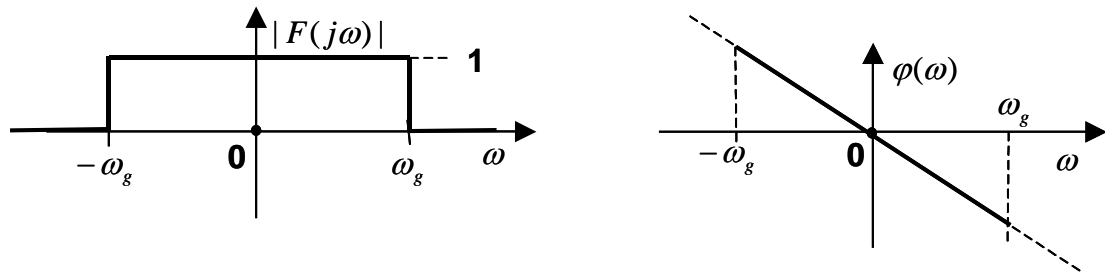


Bild 6.4: Betrags- und Phasenverlauf eines idealen Tiefpasses

Im Frequenzbereich von $-\omega_g$ bis $+\omega_g$ ist der Betrag $|F(j\omega)| = 1$ und der Phasenverlauf linear $\varphi(\omega) = -\omega \cdot T_t$. Damit würden die Frequenzanteile zwischen $-\omega_g$ und $+\omega_g$ unverändert vom Eingang zum Ausgang übertragen. Die Verzögerungszeit (Laufzeit) ist für alle Frequenzanteile gleich T_t . Frequenzanteile mit Frequenzen größer $+\omega_g$ bzw. kleiner $-\omega_g$ würden vollständig unterdrückt, da $|F(j\omega)|$ in diesem Bereich Null ist.

Leider ist der ideale Tiefpass nicht realisierbar. In der Literatur wird gezeigt, dass er das Kausalitätsprinzip verletzt [8]. Berechnet man die Impulsantwort für dieses Filter, dann ist diese Funktion, schon bevor der Impuls aufgeschaltet wird, vom Impuls beeinflusst.

Es wurden verschiedene Standard-Tiefpass-Filter entwickelt, die realisierbare Näherungen des idealen Filters darstellen. In [15] werden solche Filter vorgestellt. Bekannte Typen sind der Butterworth-Tiefpass, der Tschebyscheff-Tiefpass und der Bessel-Tiefpass.

Die entsprechenden Zusammenhänge gelten auch für Hochpass-Filter, Bandpass-Filter und Bandsperren-Filter [8].

Bei der Reihenschaltung von einzelnen Übertragungsgliedern bleiben alle Pole und Nullstellen der beteiligten Übertragungsfunktionen erhalten, d.h. im Pol-Nullstellenplan addieren sich Pole und Nullstellen. Dabei kann es vorkommen, dass ein Pol und eine Nullstelle der beteiligten Übertragungsglieder auf die selbe Stelle in der komplexen Ebene fallen. Bei diesem Fall kompensieren sich Pol- und Nullstelle. Bei der gesamten Übertragungsfunktion kann man hierbei einen Pol mit einer Nullstelle kürzen.

Beispiel 6.2:

Die beiden Übertragungsfunktionen

$$F_1(s) = \frac{5(s + 2/\text{sec})}{s \cdot (s + 4/\text{sec})}, \quad \text{und}$$

$$F_2(s) = \frac{4(s + 2/\text{sec} + j3/\text{sec}) \cdot (s + 2/\text{sec} - j3/\text{sec})}{(s + 2/\text{sec}) \cdot (s - 1/\text{sec})}$$

werden in Reihe geschaltet.

Man erhält $F(s) = F_1(s) \cdot F_2(s)$, eingesetzt ergibt sich

$$F(s) = \frac{20(s + 2/\text{sec}) \cdot (s + 2/\text{sec} + j3/\text{sec}) \cdot (s + 2/\text{sec} - j3/\text{sec})}{s \cdot (s + 4/\text{sec}) \cdot (s + 2/\text{sec}) \cdot (s - 1/\text{sec})}$$

Die Nullstelle bei $-2/\text{sec}$ kürzt sich mit der Polstelle am gleichen Ort. Damit folgt

$$F(s) = \frac{20 \cdot (s + 2/\text{sec} + j3/\text{sec}) \cdot (s + 2/\text{sec} - j3/\text{sec})}{s \cdot (s + 4/\text{sec}) \cdot (s - 1/\text{sec})}$$

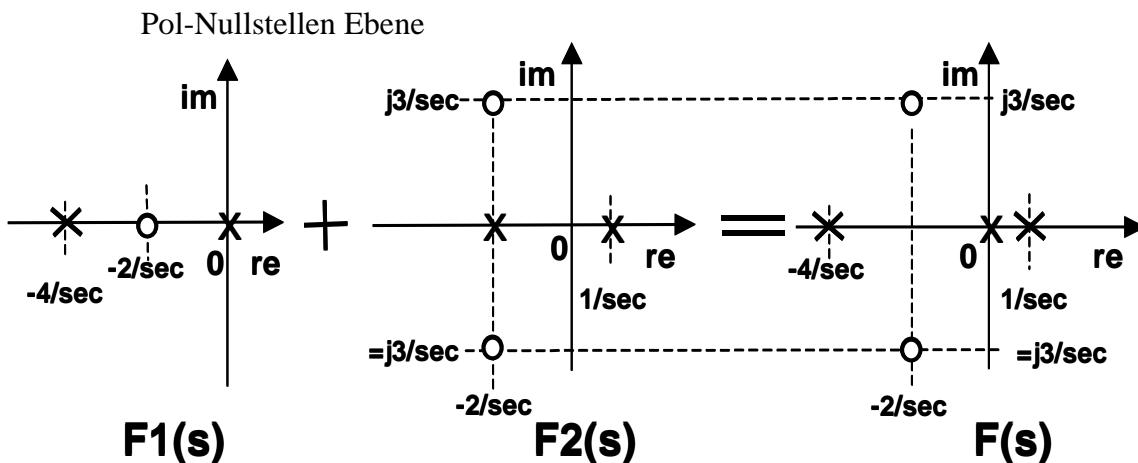


Bild 6.5: Hintereinanderschaltung von 2 Übertragungsgliedern dargestellt am Pol-Nullstellen-Diagramm

$F_1(s)$ und $F_2(s)$ und damit auch $F(s)$ sind instabil, da jeweils ein Pol in der positiven komplexen Halbebene bzw. im Ursprung liegt.

6.2 Parallelschaltung

Parallel geschaltete Übertragungsglieder bekommen das gleiche Eingangssignal aufgeschaltet. Die Ausgangssignale werden addiert bzw. subtrahiert. Anhand von zwei parallel geschalteten Übertragungsgliedern wird die Struktur aufgezeigt.

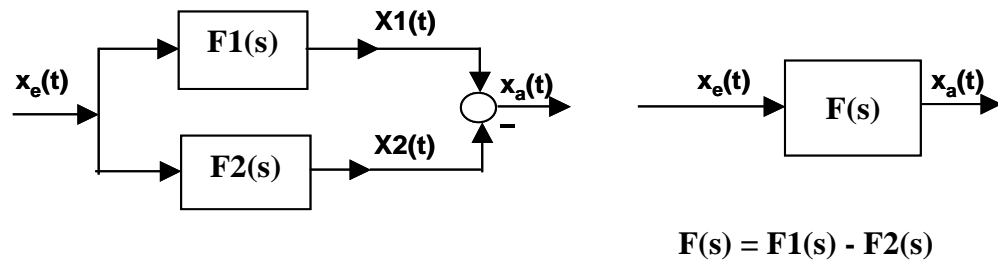
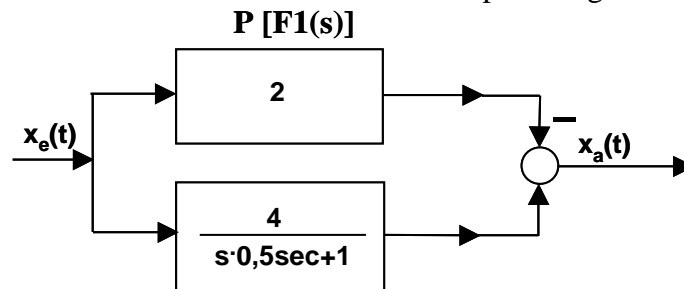


Bild 6.6: Parallelschaltung von Übertragungsgliedern

Die Übertragungsfunktionen werden unter Berücksichtigung des Vorzeichens bei der Additionstelle addiert. Beim obigen Fall wird das Signal $x_2(t)$ negativ gewertet. Es ist mit einem Minus-Zeichen bei der Additionstelle versehen. Das Signal $x_1(t)$ wird addiert, da beim Eingang dieses Signals in das Additionssymbol kein Minus-Zeichen vorliegt.

Beispiel 6.3:

Ein P-Glied und ein PT1-Glied sind parallel geschaltet.



$$P: \quad F1(s) = 2, \quad PT1: \quad F2(s) = \frac{4}{s \cdot 0,5 \text{sec} + 1}$$

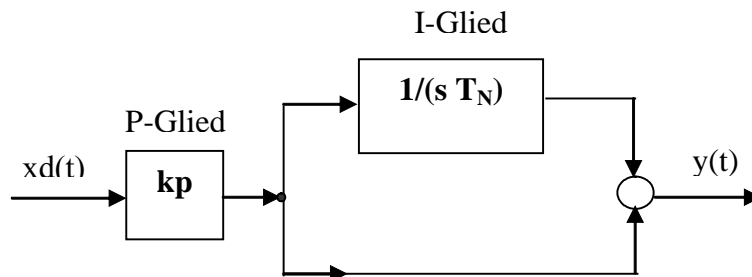
Zusammenfassung:

$$F(s) = -F1(s) + F2(s) = -2 + \frac{4}{s \cdot 0,5 \text{sec} + 1} = \frac{-2(s \cdot 0,5 \text{sec} + 1) + 4}{s \cdot 0,5 \text{sec} + 1} = 2 \frac{-s \cdot 0,5 \text{sec} + 1}{s \cdot 0,5 \text{sec} + 1}$$

Das Ergebnis zeigt, dass die Parallelschaltung einen stabilen Allpass 1. Ordnung darstellt.

Übungsaufgabe 6.1:

Ein oft eingesetzter Regler ist der PI-Regler. Er lässt sich mit folgender Struktur realisieren



- Fassen Sie die Struktur zu einem Block zusammen. Geben Sie die Übertragungsfunktion $F(s)$ des Reglers an !
- Skizzieren Sie den Pol- Nullstellen- Plan für $k_p = 2$ und $T_N = 4\text{sec}$!
- Skizzieren Sie die Ortskurve des PI-Reglers mit den Zahlenwerten von b.) !
- Bestimmen Sie das Bode- Diagramm mit den Zahlenwerten von b.) !

Bei der Parallelschaltung bleiben die Pole der parallel geschalteten Glieder erhalten. Die Nullstellen dagegen ändern sich. Der Pol-Nullstellen-Plan der Parallelschaltung enthält alle Pole der parallel geschalteten Übertragungsglieder. Die Nullstellen entstehen neu durch die Parallelschaltung. Natürlich kann es auch hier vorkommen, dass sich Pole und Nullstellen kompensieren

6.3 Rückkopplung

Man unterscheidet zwei Typen von Rückkopplungen, die Gegenkopplung und die Mitkopplung.

In der Regelungstechnik stellt die Grundstruktur eines Regelkreises eine Gegenkopplung dar.

6.3.1 Gegenkopplung

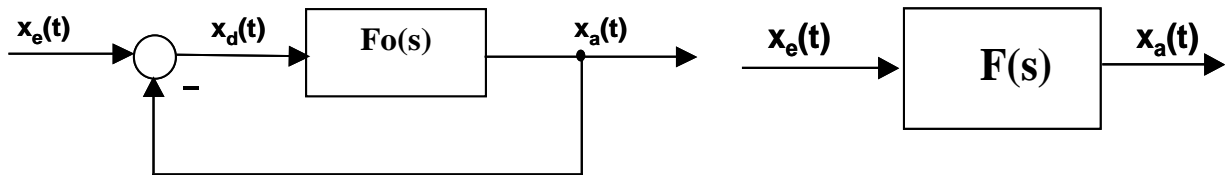


Bild 6.7: Gegenkopplungsstruktur

Die Übertragungsfunktion $F_o(s)$ ist in eine Gegenkopplungsstruktur eingebettet.

Die Gegenkopplungsstruktur kann zu einem Block mit der Übertragungsfunktion $F(s)$ zusammengefasst werden. $F(s)$ wird im Laplace-Bereich bestimmt.

Mit den Laplace-Transformierten

$$X_e(s) = L\{x_e(t)\}, \quad X_d(s) = L\{x_d(t)\}, \quad X_a(s) = L\{x_a(t)\}.$$

erhält man

$$X_d(s) = X_e(s) - X_a(s),$$

$$X_a(s) = F_o(s) \cdot X_d(s).$$

Eingesetzt:
$$X_a(s) = F_o(s) \cdot [X_e(s) - X_a(s)].$$

Aufgelöst nach $X_a(s)$:
$$X_a(s) [1 + F_o(s)] = F_o(s) \cdot X_e(s),$$

$$X_a(s) = \frac{F_o(s)}{1 + F_o(s)} \cdot X_e(s).$$

Damit ergibt für die Gegenkopplungsstruktur die wichtige Beziehung

$$F(s) = \frac{F_o(s)}{1 + F_o(s)}. \quad \text{Gl.(6.1)}$$

$F_o(s)$ ist oft eine rational gebrochene Funktion mit einem Polynom $Z_o(s)$ im Zähler und einem Polynom $N_o(s)$ im Nenner

$$F_o(s) = \frac{Z_o(s)}{N_o(s)}.$$

In die Gl. (6.1) eingesetzt folgt

$$F(s) = \frac{\frac{Zo(s)}{No(s)}}{1 + \frac{Zo(s)}{No(s)}} = \frac{Zo(s)}{No(s) + Zo(s)} .$$

Gl.(6.2)

Gl.(6.2) zeigt, dass bei der Gegenkopplungsstruktur die Nullstellen von $Fo(s)$ erhalten bleiben, sich jedoch die Polstellen ändern. $F(s)$ hat also die gleichen Nullstellen wie $Fo(s)$. Die Pole von $F(s)$ sind geändert gegenüber den Polen von $Fo(s)$. Dies ist sehr wichtig für die Regelungstechnik. Ist z.B. $Fo(s)$ instabil, dann kann mit der Gegenkopplung erreicht werden, dass $F(s)$ stabil wird.

Beispiel 6.4:

Ein instabiler Allpass mit der Übertragungsfunktion

$$Fo(s) = kp \cdot \frac{1 + 2\text{sec} \cdot s}{1 - 2\text{sec} \cdot s}$$

wird in eine Gegenkopplungsstruktur eingebettet. Für welche kp -Werte ist die Gegenkopplungsstruktur mit ihrer Übertragungsfunktion $F(s)$ stabil ?

$$F(s) = \frac{Fo(s)}{1 + Fo(s)} = \frac{kp \cdot (1 + 2\text{sec} \cdot s)}{(1 - 2\text{sec} \cdot s) + kp \cdot (1 + 2\text{sec} \cdot s)} = \frac{kp \cdot (1 + 2\text{sec} \cdot s)}{2\text{sec} \cdot s \cdot (kp - 1) + 1 + kp} ,$$
$$F(s) = \frac{kp}{1 + kp} \cdot \frac{1 + 2\text{sec} \cdot s}{\frac{2\text{sec} \cdot (kp - 1)}{kp + 1} \cdot s + 1} .$$

Die Polstelle von $F(s)$ liegt somit bei

$$s_p = -\frac{kp + 1}{(kp - 1)} \cdot \frac{1}{2\text{sec}} .$$

$F(s)$ hat eine Polstelle s_p auf der reellen Achse. Für $kp < 1$ liegt die Polstelle auf der positiv reellen Achse. Damit ist für diesen kp -Bereich $F(s)$ instabil. Für $kp > 1$ ist $F(s)$ stabil.

Übungsaufgabe 6.2:

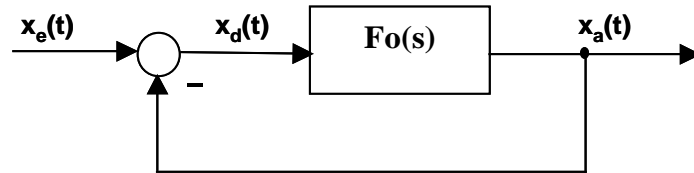
Im Abschnitt 5.2.2 wird das IT1-Glied vorgestellt, es besitzt einen Pol im Nullpunkt beim Pol-Nullstellen-Plan und ist daher instabil.



Gegeben ist das IT1-Glied mit der Übertragungsfunktion

$$Fo(s) = \frac{k}{s \cdot 3\text{sec}(s \cdot 2\text{sec} + 1)} .$$

Das Übertragungsglied wird in den Vorwärtszweig einer Gegenkopplung eingefügt.



- Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $F(s)$ zwischen $x_e(t)$ und $x_a(t)$!
- Ist $F(s)$ für $k > 0$ stabil ?
- Wo liegen die Pole von $F(s)$ für $k = 0,5$, $k = 1,5$ und $k = 3$?
- Am Eingang wird $x_e(t)$ als Sprung aufgeschaltet. Enthält für die k -Werte von c.) die Sprungantwort periodische Anteile ?

6.3.2 Mitkopplung

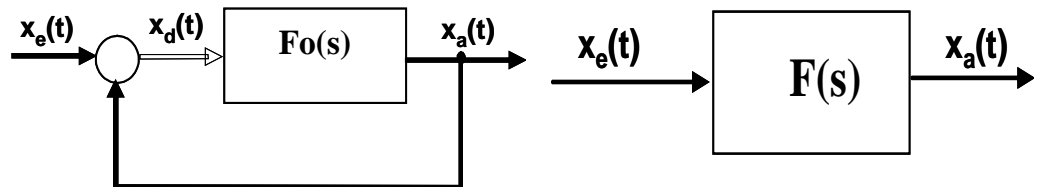


Bild 6.8: Mitkopplungsstruktur

Bei der Mitkopplung wird das Ausgangssignal zu Eingangssignal addiert. Die Übertragungsfunktion $F(s)$ der Zusammenfassung lässt sich auf gleichem Weg wie bei der Gegenkopplung bestimmen. Man erhält als Ergebnis für die Mitkopplung

$$F(s) = \frac{F_o(s)}{1 - F_o(s)} . \quad \text{Gl.(6.3)}$$

Beispiel 6.5:

Ein PT1-Glied wird in eine Mitkopplungsstruktur eingefügt. Das PT1-Glied hat die Übertragungsfunktion

$$F_o(s) = \frac{kp}{s \cdot 5\text{sec} + 1} ,$$

ist also stabil.

Die Übertragungsfunktion der gesamten Mitkopplungsstruktur ergibt sich zu

$$F(s) = \frac{Fo(s)}{1 - Fo(s)} = \frac{kp}{s \cdot 5 \text{ sec} + 1 - kp} = \frac{kp}{1 - kp} \cdot \frac{1}{\left(s \cdot \frac{5 \text{ sec}}{1 - kp} + 1\right)} \quad \text{Gl. (6.4)}$$

Die Zeitkonstante $T = \frac{5 \text{ sec}}{1 - kp}$ ist negativ für $kp > 1$, d.h., für $kp > 1$ ist $F(s)$

instabil und für $kp < 1$ ist $F(s)$ stabil.

Schaltet man am Eingang zum Zeitpunkt Null einen Einheitssprung auf, dann erhält man bei verschwindendem Anfangswert $x_a(0)$

$$X_a(s) = F(s) \frac{1}{s} = \frac{kp}{1 - kp} \cdot \frac{1}{\left(s \cdot \frac{5 \text{ sec}}{1 - kp} + 1\right)} \cdot \frac{1}{s}$$

Die Rücktransformation in den Zeitbereich ergibt

$$x_a(t) = \frac{kp}{1 - kp} \cdot \left(1 - e^{-\frac{1 - kp}{5 \text{ sec}} \cdot t}\right) \quad \text{für } t \geq 0 \text{ sec.}$$

Für $kp > 1$ wird der Exponent der e-Funktion positiv, d.h. die Funktion $x_a(t)$ strebt dann für $t \rightarrow \infty$ ebenfalls gegen unendlich. Nach Abschnitt 4.2 ist ein System instabil, wenn bei begrenztem Eingangssignal das Ausgangssignal gegen Unendlich strebt.

Interessant ist noch der Fall $kp = 1$. Setzt man in der Gl. (6.4) $kp = 1$, dann ergibt sich

$$F(s) = \frac{1}{s \cdot 5 \text{ sec}}$$

$F(s)$ ist in diesem Spezialfall ein I-Glied und damit auch instabil.

Literaturverzeichnis

- [1] Stein, U.: Einstieg in das Programmieren mit Matlab.
Hanser Verlag, München

- [2] Mann, H.; Schiffelgen, H.; Froriep, R.: Einführung in die Regelungstechnik.
Hanser Verlag, München

- [3] Christoph, G.; Hackel, H.: Starthilfe Stochastik.
Teubner Verlag, Stuttgart

- [4] Unbehauen, H.: Regelungstechnik II.
Friedr. Vieweg-Verlag, Braunschweig

- [5] Stöcker, H.: Taschenbuch Mathematischer Formeln Und Moderner Verfahren.
Harri Deutsch-Verlag, Frankfurt/Main

- [6] Föllinger, O.: Laplace und Fourier-Transformation.
Hüthig-Verlag, Heidelberg

- [7] Papula, L.: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler.
Band 2, Vieweg-Verlag, Braunschweig

- [8] Scheithauer, R.: Signale und Systeme.
Teubner-Verlag, Stuttgart

- [9] Föllinger, O.: Regelungstechnik.
Hütig-Verlag, Heidelberg

- [10] Freund, E.: Regelungssysteme im Zustandsraum.
Band I und II, Oldenbourg-Verlag, München

- [11] Unbehauen, H.: Regelungstechnik III .
Friedr. Vieweg-Verlag, Braunschweig

- [12] Lutz, H.; Wendt, W.: Taschenbuch der Regelungstechnik.
Verlag Harri Deutsch, Frankfurt/Main

- [13] Bode, H.: Matlab in der Regelungstechnik.
Teubner-Verlag, Stuttgart

- [14] Kaufmann, H.: Dynamische Vorgänge in linearen Systemen der Nachrichten- und Regelungstechnik .
Oldenbourg-Verlag, München
- [15] Tietze, U.; Schenk, Ch.: Halbleiter – Schaltungstechnik.
Springer-Verlag, Berlin

Stichwortverzeichnis

- Allpass 89
- Amplitudenspektrum 13, 23
- Anfangswertsatz 36
- aperiodischer Signale 20
- Betragskennlinie 66, 108
- Blockschaltbild 1
- Bode-Diagramm 65, 101
- Charakteristische Gleichung 41
- Differenzialgleichung 40
- Differenzier-Glied (D-Glied) 123
- Differenzierglied mit Verzögerung 1. Ordnung (DT1-Glied) 126
- Eigenwerte 41, 85
- Elektrische Netzwerke 67
- Endwertsatz 36
- Feder-Masse System 83
- Feder-Masse-Modell 49
- Feder-Masse-System 74, 103
- Fourier-Analyse 10, 20
- Fourier-Integral 20
- Fourier-Reihe 14, 17
- Fourierspektrum 18
- Fourier-Transformation 18, 20
- Frequenzbereich 55
- Frequenzgang 59
- Frequenzkennlinien 65
- Frequenzspektrum 10, 11
- Gegenkopplung 138
- Gewichtsfunktion 53, 75
- Homogene Lösung 40
- Impulsantwort 53
- Instabilität 88
- Integrationsglied 116, 117
- Integrierer 72
- Integrier-Glied 116
- Kennkreisfrequenz 108
- komplexe Ebene 63
- Komplexe Pole 88
- komplexe s-Ebene 82
- Laplace-Integral 26
- Laplace-Transformation 25, 26
- Laplace-Transformations-Tabelle 30
- Lineare Zeitinvariante Systeme (LTI-Systeme) 39
- LTI-Übertragungsgliedern 57
- Minimumphasensystem 89
- Mitkopplung 140
- Niveauregelung 1
- Nullstellen 41, 110, 139
- Ortskurve 63, 90, 96, 100, 107, 114, 115, 118, 124, 127
- Parallelschaltung 136
- Partialbruchzerlegung 77, 78, 79, 82
- Partikuläre Lösung 43
- Phasenkennlinie 66, 96, 115, 125, 128
- Phasenspektrum 23
- Pol-Nullstellen-Diagramm 92, 111, 112, 120, 122, 125, 136
- Pol-Nullstellen-Plan 93
- Polstellen 81, 82
- PT1- Glied 97
- PT2-Glied 102
- PTn-Glied 132
- Rampenantwort 53, 73
- Reihenschaltung 131
- Resonanzfrequenz 108
- Rückkopplung 138
- Spektrallinien 11, 18, 22
- Spektrum 24
- Sprungantwort 7, 51, 52, 53, 92, 96, 99, 104, 114, 122, 124, 133
- Stabilität 85
- Systemtheorie 2
- Testfunktionen 50
- Totzeitglied 112
- Überlagerungsprinzip 40
- Übertragungsfunktion 69
- Übertragungsglied 2, 39
- Verstärkerprinzip 40
- Zeiger 18, 58, 63

Zeitbereich 51
Zeitinvarianz 39
Zustandsraum 45